Aufgabe 6. $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ liegen im gleichen p-Block genau dann, wenn $\omega_\chi(\widehat{C})^* = \omega_\psi(\widehat{C})^*$ für alle *p-regulären* Konjugationsklassen C.

Beweis. Sind χ, ψ im gleichen Block, so ist $\omega_\chi(\widehat{C})^* = \omega_\psi(\widehat{C})^*$ für *alle* Konjugationsklassen C (nach Definition). Für die Umkehrung zeigen wir: Liegen χ, ψ nicht im gleichen Block, so gibt es eine p-reguläre Konjugationsklasse C mit $\omega_\chi(\widehat{C})^* \neq \omega_\psi(\widehat{C})^*$.
Erinnerung: Für eine Zusammenhangskomponente $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ (bzgl linkage) haben wir $f_\mathcal{A} := \sum_{\chi \in \mathcal{A}} e_\chi \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$. Wir können schreiben $f_\mathcal{A} = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} f_\mathcal{A}(\widehat{C})\widehat{C}$ mit $f_\mathcal{A}(\widehat{C}) \in \mathbb{C}$. Nach Folgerung 2.8 ist $f_\mathcal{A}(\widehat{C}) = 0$ falls C p-singulär ist, d.h. $f_\mathcal{A}$ ist eine $\mathbb{C}$-Linearkombination von Klassensummen p-regulärer Konjugationsklassen. Nach Satz 2.9 gilt

$$\omega_\chi(f_\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun wieder zur Aufgabe: Sei $\mathcal{A}$ die Zusammenhangskomponente von χ. Wir haben angenommen, dass ψ nicht im gleichen Block wie χ liegt, d.h. $\omega_\chi(f_\mathcal{A}) = 1$ und $\omega_\psi(f_\mathcal{A}) = 0$. Folglich ist $\omega_\chi(f_\mathcal{A})^* \neq \omega_\psi(f_\mathcal{A})^*$. Wäre nun aber $\omega_\chi(\widehat{C})^* = \omega_\psi(\widehat{C})^*$ für alle p-regulären Klassen, so wäre, da $f_\mathcal{A}$ nach oben eine Linearkombination von Klassensummen p-regulärer Klassen ist, auch $\omega_\chi(f_\mathcal{A})^* = \omega_\psi(f_\mathcal{A})^*$. Widerspruch und fertig. □