Aufgabe 7. Bestimme die p-Blöcke der symmetrischen Gruppe $G := \mathrm{S}_5$ für alle Primzahlen p.

Es ist $|G| = 5!$ und daher sind die kritischen Primzahlen $p = 2, 3, 5$. Für alle anderen Primzahlen ist KG halbeinfach, sodass jeder KG-Block genau einen einfachen Modul hat, und die Reduktion von $\mathbb{C}$ nach K definiert eine Bijektion zwischen den Blöcken und den einfachen Moduln.
Wir betrachten zunächst die Charaktertafel von $\mathbb{C}G$.

$\mathfrak{C}$	(1)	$(1,2)(3,4)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4,5)$	$(1,2)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2,3)(4,5)$
$\lvert\mathfrak{C}\rvert$	1	15	20	24	10	30	20
Ord	1	2	3	5	2	4	6
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	6	-2	.	1	.	.	.
χ_4	4	.	1	-1	2	.	-1
χ_5	4	.	1	-1	-2	.	1
χ_6	5	1	-1	.	1	-1	1
χ_7	5	1	-1	.	-1	1	-1

Eine Möglichkeit, die p-Blöcke zu bestimmen ist folgende: Zwei einfache $\mathbb{C}G$-Moduln liegen im selben p-Block genau dann, wenn die Reduktion ihres zentralen Charakters nach K übereinstimmt. Der zentrale Charakter eines einfachen $\mathbb{C}G$-Moduls S ist der K-Morphismus $\omega_V : \mathrm{Z}(\mathbb{C}G) \to \mathbb{C}$, der durch $\omega_S(\Sigma(\mathfrak{C})) = \frac{|\mathfrak{C}|\chi_S(g)}{\chi_S(1)}$ für beliebiges $g \in \mathfrak{C}$ gegeben ist, wobei $\Sigma(\mathfrak{C})$ die Klassensumme von $\mathfrak{C}$ ist (beachte, dass die $\Sigma(\mathfrak{C})$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$ bilden; „abstrakt" ist $\omega_S(z)$ für $z \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$ gleich dem Skalar über den z auf V operiert). Anhand der Charaktertafel können wir die zentralen Charaktere von $\mathbb{C}G$ sofort bestimmen:

	$\Sigma(\mathfrak{C}_1)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_2)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_3)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_4)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_5)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_6)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_7)$
ω_1	1	15	20	24	10	30	20
ω_2	1	15	20	24	-10	-30	-20
ω_3	1	-5	0	4	0	0	0
ω_4	1	0	5	-6	5	0	-5
ω_5	1	0	5	-6	-5	0	5
ω_6	1	3	-4	0	2	-6	4
ω_7	1	3	-4	0	-2	6	-4

$\mathbf{p = 2}$. Die Reduktion der zentralen Charaktere im Fall $p = 2$ ist:

	$\Sigma(\mathfrak{C}_1)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_2)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_3)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_4)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_5)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_6)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_7)$
$\omega_1 \bmod (2)$	1	1	0	0	0	0	0
$\omega_2 \bmod (2)$	1	1	0	0	0	0	0
$\omega_3 \bmod (2)$	1	1	0	0	0	0	0
$\omega_4 \bmod (2)$	1	0	1	0	1	0	1
$\omega_5 \bmod (2)$	1	0	1	0	1	0	1
$\omega_6 \bmod (2)$	1	1	0	0	0	0	0
$\omega_7 \bmod (2)$	1	1	0	0	0	0	0

Es ist also $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv \omega_3 \equiv \omega_6 \equiv \omega_7$ diese sind verschieden von $\omega_4 \equiv \omega_5$. Folglich gibt es zwei Blöcke $B_1 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_6, \chi_7\}$ und $B_2 = \{\chi_4, \chi_5\}$. Die Anzahl der p'-Konjugationsklassen von G ist 3, d.h. es gibt gibt drei einfache KG-Moduln. Der triviale Brauer-Charakter gehört offensichtlich zu B_1 und wäre dies der einzige irreduzible Brauer-Charakter zu B_1, so wäre χ° ein Vielfaches des trivialen Brauer-Charakters für alle $\chi \in B_1$ und dies ist sicherlich nicht der Fall. Also gehören zwei irreduzible KG-Moduln zu B_1 und nur einer zu B_2; diese treten als Konstituenten der Reduktionen der $\mathbb{C}G$-Moduln in dem jeweiligen Block auf.

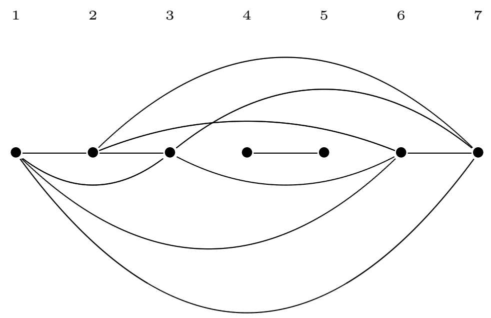
Bemerkung: Die Brauer-Charaktertafel von G für $p = 2$ ist

	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{C}_4$
β_1	1	1	1
β_2	4	-2	-1
β_3	4	1	-1

und damit erhält man die Zerlegungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir den Brauer-Graphen von G für $p = 2$:



Weiterhin sind β_1, β_2 die zum Block B_1 gehörigen Brauer-Charaktere und β_3 der zu B_2 gehörige.

$\mathbf{p = 3}$. Die Reduktion der zentralen Charaktere im Fall $p = 3$ ist:

	$\Sigma(\mathfrak{C}_1)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_2)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_3)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_4)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_5)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_6)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_7)$
ω_1 mod (3)	1	0	2	0	1	0	2
ω_2 mod (3)	1	0	2	0	2	0	1
ω_3 mod (3)	1	1	0	1	0	0	0
ω_4 mod (3)	1	0	2	0	2	0	1
ω_5 mod (3)	1	0	2	0	1	0	2
ω_6 mod (3)	1	0	2	0	2	0	1
ω_7 mod (3)	1	0	2	0	1	0	2

Wir haben also drei Blöcke: $B_1 = \{\chi_1, \chi_5, \chi_7\}$, $B_2 = \{\chi_2, \chi_4, \chi_6\}$ und $B_3 = \{\chi_3\}$. Die Anzahl der p'-Klassen und damit einfacher KG-Moduln ist 5. Da B_3 einelementig ist, ist χ_3° ein irreduzibler Brauer-Charakter und gehört zu B_3. Betrachten von χ_2° zeigt sofort, dass dies auch ein irreduzibler Brauer-Charakter ist. Dieser gehört zu B_2. Somit müssen nur noch zwei weitere irreduzible Brauer-Charaktere auf die Blöcke (notwendig B_1,B_2) verteilt werden. Hätte B_1 nur einen irreduziblen Brauer-Charakter (also χ_1°), so wären $\chi_5^\circ, \chi_6^\circ$ Vielfache von χ_1° und das ist nicht der Fall. Also haben B_1, B_2 jeweils zwei irreduzible Brauer-Charaktere.

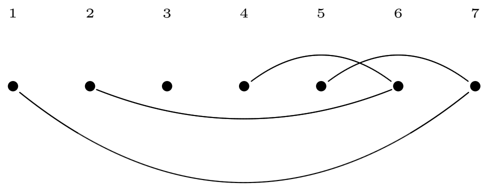
Bemerkung: Die Brauer-Charaktertafel von G für $p = 3$ ist:

	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{C}_4$	$\mathfrak{C}_5$	$\mathfrak{C}_6$
β_1	1	1	1	1	1
β_2	1	1	1	-1	-1
β_3	6	-2	1	.	.
β_4	4	.	-1	2	.
β_5	4	.	-1	-2	.

und damit erhält man die Zerlegungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir den Brauer-Graphen von G für $p = 3$:



Weiterhin sind β_1, β_5 die zum Block B_1 gehörigen Brauer-Charaktere, β_2, β_4 die zum Block B_2 gehörigen und β_3 der zu B_3 gehörige.

p = 5. Die Reduktion der zentralen Charaktere im Fall $p = 5$ ist:

	$\Sigma(\mathfrak{C}_1)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_2)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_3)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_4)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_5)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_6)$	$\Sigma(\mathfrak{C}_7)$
$\omega_1 \bmod (5)$	1	0	0	4	0	0	0
$\omega_2 \bmod (5)$	1	0	0	4	0	0	0
$\omega_3 \bmod (5)$	1	0	0	4	0	0	0
$\omega_4 \bmod (5)$	1	0	0	4	0	0	0
$\omega_5 \bmod (5)$	1	0	0	4	0	0	0
$\omega_6 \bmod (5)$	1	3	1	0	2	4	4
$\omega_7 \bmod (5)$	1	3	1	0	3	1	1

Wir haben also drei Blöcke: $B_1 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\}$, $B_2 = \{\chi_6\}$ und $B_3 = \{\chi_7\}$. Die Anzahl der p'-Klassen und damit der einfachen KG-Moduln ist 6. Offensichtlich hat B_1 fünf irreduzible KG-Moduln, die beiden anderen Blöcke genau einen.

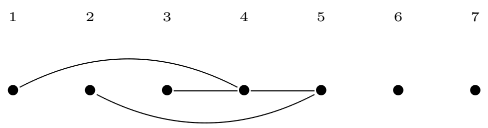
Bemerkung: Die Brauer-Charaktertafel von G für $p = 5$ ist:

	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{C}_5$	$\mathfrak{C}_6$	$\mathfrak{C}_7$
β_1	1	1	1	1	1	1
β_2	1	1	1	-1	-1	-1
β_3	3	-1	.	1	-1	-2
β_4	3	-1	.	-1	1	2
β_5	5	1	-1	1	-1	1
β_6	5	1	-1	-1	1	-1

und damit erhält man die Zerlegungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir den Brauer-Graphen von G für $p = 5$:



Weiterhin sind $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ die zum Block B_1 gehörigen Brauer-Charaktere, β_6 der zum Block B_3 gehörige und β_7 der zu B_3 gehörige.