Einleitung zu *Éléments de géométrie algébrique*

Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné

Aus dem Französischen von
Ulrich Thiel

Anmerkung. Dies ist die Übersetzung der Einleitung zu *Éléments de géométrie algébrique* von Alexander Grothendieck und Jean Dieudonné aus dem Jahre 1971 ([GD71]). Es ist zu beachten, dass es sich dabei um eine veränderte Version der Originalarbeit [Gro60] von Grothendieck handelt, die einen größeren Wert auf die kategorielle Sprache legt. Dies spiegelt sich auch in der Einleitung wider, die dadurch zu einer hervorragenden Motivation für den Begriff eines Schemas aus der modernen Perspektive wird. Die Übersetzung richtet sich sehr nach dem Originaltext (was zu teilweise etwas verschachtelten Sätzen führte), jedoch kann ich keine Garantie für die Korrektheit der Übersetzung geben. Version vom 29. November 2013.

1. Wir haben uns vorgenommen in dieser Einleitung (ohne in die Details zu gehen) zu zeigen, wie die moderne Auffassung der algebraischen Geometrie aus einer recht natürlichen Entwicklung fundamentaler Probleme, die dieser Zweig der Mathematik aufgeworfen hat, entstanden ist. Zur Vereinfachung dieser Darstellung verwenden wir die Sprache der modernen Mathematik ebenfalls zur Beschreibung historischer Sachverhalte bei denen offensichtlich ist, dass die Sprache und Technik der zeitgenössischen Autoren sehr unterschiedlich von den heutigen Vorstellungen war.

2. Man kann sagen, dass der historische Ursprung und eines der wesentlichen Ziele der Algebra – seit den Babyloniern, den Hindus und Dióphantos, bis in die heutige Zeit – das Studium der Lösungen polynomialer Gleichungssysteme ist. Um dieses Problem zu präzisieren, betrachten wir einen kommutativen Ring k mit Einheit und den Polynomring

$$\mathrm{P}_I = \mathrm{P} = k[(T_i)_{i\in I}] \tag{1}$$

mit Koeffizienten in k und einer beliebigen Familie $(T_i)_{i\in I}$ von Unbestimmten. Erinnern wir uns daran, dass es für jede Familie $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i\in I}$ von Elementen aus k genau einen k-Algebren Homomorphismus von P nach k gibt, der jedes T_i auf t_i abbildet ($i \in I$): das Bild eines Polynoms $F \in \mathrm{P}$ unter diesem Homomorphismus bezeichnen wir mit $F(\boldsymbol{t})$. Wir haben somit für jedes Polynom $F \in \mathrm{P}$ eine „Polynomfunktion“ $\boldsymbol{t} \mapsto F(\boldsymbol{t})$ von k^I nach k definiert.

Dies gegeben besteht das betrachtete Problem darin, für eine gegebene Familie $(F_j)_{j\in J}$ von Polynomen in P diejenigen Systeme $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i\in I}$ zu suchen, für die

$$F_j(\boldsymbol{t}) = 0 \quad \text{für alle } j \in J \tag{2}$$

gilt. Man sagt, dass ein solches System $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i\in I}$ eine *Lösung* des *polynomialen Gleichungssystems*

$$F_j((T_i)_{i\in I}) = 0 \quad \text{für alle } j \in J \tag{3}$$

ist.

Um sich nicht von in gewissen Anwendungen (und insbesondere für die folgenden Entwicklungen) hinderlichen Einschränkungen vereinnahmen zu lassen, ist es notwendig, keine speziellen Bedingungen an die Indexmengen I und J zu stellen; historisch sind es aber die Probleme bei denen I und J *endlich* sind, die für lange Zeit beinahe ausschließlich studiert wurden.

3. Zu dem rein „algebraischen“ Aspekt des vorhergehenden Problems hat sich – seit der Erfindung dessen, was man lange Zeit die „analytische Geometrie“ nannte – zunächst für $k = \mathbb{R}$ und I reduziert auf 2 oder 3 Elemente – wo sich herausstellte, dass die die Lösungsmengen bestimmter Systeme wie in (3) „Kurven“ oder „Flächen“ sind, die seit der Antike studiert wurden, wie zum Beispiel die Kegelschnitte oder die Quadriken – ein bedeutender geometrischer Aspekt hinzugefügt. Seit ungefähr der Mitte des 19. Jahrhunderts hat man sich, inspiriert durch die Sprache der elementaren Geometrie, Schritt für Schritt daran gewöhnt eine geometrische Sprache für einen beliebigen Ring k und eine beliebige Indexmenge I zu verwenden; daher wird k^I auch oft ein „affiner Raum“ über k genannt und seine Elemente $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i\in I}$ werden „Punkte“ genannt.

4. Die erste natürliche Frage, die man sich beim Studium von Gleichungssystemen wie in (3) stellt, betrifft die Menge der Lösungen in k^I: ist diese Menge leer oder nicht? Ist sie endlich oder nicht? Falls sie endlich ist, kann man eine Abschätzung für die Anzahl der Lösungen geben? Falls sie unendlich ist, kann man asymptotische Abschätzungen für die Anzahl derjenigen Lösungen angeben, die zusätzliche Ungleichungen erfüllen oder durch Parameter dargestellt sind, wenn diese Parameter gegen bestimmte Grenzwerte laufen? Etc. Man kann diesen „naiven“ Standpunkt als *arithmetischen* Standpunkt beschreiben (in einem sehr breiten Sinn), weil die „arithmetische“ Natur des Rings k dabei eine wesentliche Rolle spielt: die Methoden und Resultate sind sehr unterschiedlich wenn k ein Körper, oder ein Ring wie $\mathbb{Z}$, oder der Ganzheitsring in einem algebraischen Zahlkörper ist. Ebenso unterscheiden sich die Resultate sehr wenn k ein Körper ist, je nachdem ob k ein algebraischer Zahlkörper, ein endlicher Körper, ein algebraisch abgeschlossener Körper (wie zum Beispiel der Körper $\mathbb{C}$), oder der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen („reelle algebraische Geometrie“) ist.

5. Es ist genau das Studium der algebraischen Kurven und Flächen im reellen Bereich, das zu einer anderen Sichtweise führen würde: seit dem Anfang des 18. Jahrhunderts, und systematisch seit Monge und Poncelet, assoziiert man zu einem System (3) mit reellen Koeffizienten das *gleiche* System, von dem man nun nicht mehr nur Lösungen in $\mathbb{R}^I$, sondern ebenfalls im entsprechenden *komplexen* Raum $\mathbb{C}^I$ sucht, den Fakt ausnutzend, dass $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist. Diese Idee erwies sich als sehr fruchtbar, weil die Eigenschaften der algebraisch studierten Dinge sich durch diese „Erweiterung“ des Grundkörpers erheblich vereinfachten; in der Tat kann man sogar sagen, dass diese „Erweiterung“ in einem gewissen Sinne ein wenig zu erfolgreich ist, denn der zusätzliche Vorteil über dem Körper $\mathbb{C}$ die mächtige Theorie der analytischen Funktionen zu haben, war der Grund dafür, dass man im ganzen 19. Jahrhundert praktisch aufgehört hat, andere Systeme (3) als die mit komplexen Koeffizienten zu betrachten; dies führte dazu, dass für lange Zeit die fundamentale Idee des „Wechsels des Grundkörpers“ in seiner allgemeinen Form aus den Augen verloren ging (die einzige Ausnahme betrifft die Theorie der Kongruenzen, wo die Idee der Suche nach „imaginären Lösungen“ zur Theorie der endlichen Körper (Gauß, Galois) und ihrer Anwendung in der Theorie der linearen Gruppen (Jordan, Dickson) führte).

6. Erst ab 1940 mit der von Weil, Chevalley und Zariski entwickelten „abstrakten“ algebraischen Geometrie (das heißt über einem beliebigen Grundkörper, der auch positive Charakteristik haben kann) gewann die Idee des Wechsels der Basis in einem allgemeineren Kontext an Bedeutung: Es ist in der Tat oft nötig zu einem algebraischen Abschluss von k, oder (falls k ein bewerteter Körper ist) zur Vervollständigung von k zu wechseln. Jedoch gibt es weder bei Chevalley noch Zariski ein systematisches Studium dieser Operation; während ihre Allgemeinheit bei Weil, der diese Operation bei vielen anderen Gelegenheiten benutzt, etwas verdeckt wird von der Voreingenommenheit sich nur auf Unterkörper eines ein für alle mal gewählten „genügend großen“ algebraisch abgeschlossenen Körpers (den „universellen Körper“) zu beschränken und folglich der klassischen Sichtweise nahe zu bleiben, wo der Körper $\mathbb{C}$ diese Rolle spielte. Es ist erst seit kurzem, zunächst bei E. Kähler [Käh58], dann in der ersten Edition der vorliegenden Abhandlung, dass die Nützlichkeit des Zulassens von „Erweiterungen“ k' von k, die *beliebige* (kommutative) k-*Algebren* sind (auch wenn k ein Körper ist), erkannt wurde und dass diese beliebigen Basiswechsel wahrscheinlich einer der wichtigsten Vorgänge in der modernen algebraischen Geometrie geworden ist; sodass man gegenüber der oben beschriebenen „arithmetischen“ Sichtweise die Sichtweise stellen kann, die man als „geometrisch“ beschreiben kann: sie abstrahiert von den speziellen Eigenschaften der Lösungen des Systems (3) in dem bestimmten Raum k^I, wo man gestartet ist, hin zur Betrachtung der Lösungen von (3) *in* k'^I für *jede* k-Algebra k' und der Art, in der diese Menge mit k' *variiert*; gesucht werden insbesondere die Eigenschaften des Gleichungssystems (3), die *invariant* bleiben, wenn k' variiert (oder, wie wir noch sagen, die „stabil unter Basiswechsel“ sind).

7. Die Idee der „Variation“ des Grundrings, die wir dabei sind einzuführen, drückt sich mathematisch leicht durch die funktorielle Sprache aus (deren Abwesenheit die Zurückhaltung der vorangegangenen Versuche erklären könnte). Wir können in der Tat sagen, dass wir einen kovarianten *Funktor*

$$\mathrm{E}^I : k' \mapsto k'^I \tag{4}$$

von der Kategorie der k-Algebren in die der Mengen haben, wobei dieser Funktor jedem k-Homomorphismus $\varphi : k' \to k''$ die Abbildung $\varphi^I : k'^I \to k''^I$ zuordnet; wir sagen auch, dass (4) der Funktor „Raum affinen Typs der Dimension I über k“ ist. Falls S die Familie $(F_j)_{j\in J}$ der in n° 2 betrachteten Polynome bezeichnet, so schreiben wir $\mathrm{V}_S(k')$ für die Teilmenge von k'^I bestehend aus den Lösungen des Systems (3); wir sagen auch, dass diese Lösungen die „Punkte mit Werten in k'“ der durch das System (3) definierten „Varietät über k“ sind. Es ist offensichtlich, dass

$$\mathrm{V}_S : k' \mapsto \mathrm{V}_S(k') \tag{5}$$

ein *Unterfunktor* von E^I ist (das Bild von $\mathrm{V}_S(k')$ unter φ^I ist in $\mathrm{V}_S(k'')$ enthalten). Wir stellen also im Prinzip fest, dass *das Studium von Systemen (3) aus Sicht der algebraischen Geometrie das Studium des Funktors* V_S (von der Kategorie der k-Algebren in die der Mengen) ist.

Dieses Studium hat zwei Aspekte: zunächst ist es das Studium des Funktors $k' \mapsto \mathrm{V}_S(k')$, *unabhängig* von der Art, wie er als Unterfunktor eines angemessenen Funktors „Raum affinen Typs“ realisiert ist; weiterhin ist es, gegebenenfalls, das Studium der Eigenschaften einer Einbettung $\mathrm{V}_S(k') \to k'^I$. In den meisten Problemen, mit den wir in der gewöhnlichen algebraischen Geometrie konfrontiert sind, ist der zweite Aspekte vollkommen nebensächlich: *wichtig sind nur die intrinsischen Eigenschaften des Funktor* V_S, *unabhängig von der jeweiligen affinen Immersion*

$$\mathrm{V}_S(k') \to k'^I. \tag{6}$$

Daher ist es gerechtfertigt, zwei Familien S_1, S_2 von Polynomen (es spielt dabei keine Rolle, ob die Unbestimmten beider Familien möglicherweise verschieden sind) als im wesentlichen *äquivalent* anzusehen, wenn die zugehörigen Funktoren V_{S_1} und V_{S_2} *isomorph* sind.

8. Wir werden die Struktur des Funktors (5) genauer erklären; wir beginnen mit der Beobachtung, dass sich dieser Funktor nicht ändert, wenn wir zu den gegebenen Gleichungen (3) alle Gleichungen der Form $F = 0$ hinzufügen, wobei F von der Form

$$F = \sum_{j\in} A_j F_j \tag{7}$$

ist und die A_j Polynome der Algebra $k[(T_i)_{i\in I}]$ sind, die bis auf endlich viele Indizes gleich Null sind; die Menge dieser Polynome F ist nichts anderes als das von der Familie $(F_j)_{j\in J}$ erzeugte *Ideal* $\mathfrak{I}$ der Algebra P_I. Wir können uns also bei dem Studium der Funktoren V_S immer auf den Fall von Funktoren der Form $\mathrm{V}_\mathfrak{I}$ beschränken, wobei $\mathfrak{I}$ ein Ideal von P_I ist.[1]

[1]Dies zeigt, auch wenn die Menge I der Unbestimmten endlich ist und k ein Körper ist, dass es nicht notwendig ist, sich auf endliche Gleichungssysteme zu beschränken, da die „natürlichsten“ Systeme diejenigen sind, deren Indexmenge ein Ideal von P ist (eine Menge, die nur selten endlich ist!). Obwohl, falls k ein Körper und falls I endlich ist, jedes Ideal $\mathfrak{I}$ von $\mathrm{P} = k[(T_i)_{i\in I}]$ von endlich vielen Elementen erzeugt werden kann („Basissatz“ von Hilbert), weshalb die beiden Definitionen des Funktors (5) (durch ein endliches System S, oder durch ein Ideal von P) übereinstimmen, bleibt die Tatsache bestehen, dass die Einschränkung auf die Endlichkeit *a priori* künstlich und technisch hinderlich ist.

Wir führen jetzt den k-Algebra Quotienten

$$\mathrm{A}_{\mathfrak{J}} = \mathrm{P}_I/\mathfrak{J} \tag{8}$$

ein und bemerken, dass wir eine in k' funktorielle Bijektion

$$k'^I \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(\mathrm{P}_I, k') \tag{9}$$

haben, die jedem Punkt $\boldsymbol{t} = (t_i)$ von k'^I den Homomorphismus $F \mapsto F(\boldsymbol{t})$ zuordnet. Unter dieser Bijektion entspricht $\mathrm{V}_{\mathfrak{J}}(k')$ der Menge aller k-Algebra Homomorphismen $\mathrm{P}_I \to k'$, die auf $\mathfrak{J}$ *verschwinden*, oder auch den k-Algebra Homomorphismen von von $\mathrm{A}_{\mathfrak{r}J}$ nach k'. Mit anderen Worten, wir erhalten durch Einschränkung von (9) einen Isomorphismus von Funktoren in k'

$$\mathrm{V}_{\mathfrak{J}}(k') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(\mathrm{A}_{\mathfrak{J}}, k'). \tag{10}$$

Weiterhin ist die affine Einbettung (6) unter den Bijektionen (9) und (10) nichts anderes als die Injektion $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(\mathrm{A}_{\mathfrak{J}}, k') \to \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(\mathrm{P}_I, k')$, die zum kanonischen surjektiven Homomorphismus

$$\mathrm{P}_I \to \mathrm{A}_{\mathfrak{J}} = \mathrm{P}_I/\mathfrak{J} \tag{11}$$

gehört. Wenn wir berücksichtigen, dass sich *jede* kommutative k-Algebra A in der Form $\mathrm{P}_I/\mathfrak{J}$ für entsprechendes I und $\mathfrak{J}$ schreiben lässt, so sehen wir, dass *die Funktoren* V_S *bis auf Isomorphie genau die darstellbaren Funktoren*

$$\mathrm{V}_A : k' \mapsto \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A, k') \tag{12}$$

sind. Eine Einbettung $\mathrm{V}_A \to \mathrm{E}^I$ eines solchen Funktors (für eine entsprechende Indexmenge I) ist eine injektive und in k funktorielle Abbildung

$$\mathrm{V}_A(k') \to k'^I.$$

Nun, falls wir eine in k' funktorielle Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A, k') \to \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(\mathrm{P}_I, k') \tag{13}$$

haben, so entspricht für $k' = A$ der Identität 1_A auf A durch (13) ein k-Homomorphismus

$$\pi : \mathrm{P}_I \to A \tag{14}$$

und, wegen der Funktorialität, ist die Abbildung (13) nichts anderes als $u \mapsto u \circ \pi$. Falls der Homomorphismus π *surjektiv* ist, so ist die Abbildung (13) injektiv (die Umkehrung ist nicht richtig); wir beschränken uns in der Regel auf wie in (6) mittels eines surjektiven Homomorphismus π erhaltende Einbettungen $\mathrm{V}_A \to \mathrm{E}^I$. Die Angabe eines solchen Homomorphismus ist übrigens äquivalent zur Angabe der Bilder der T_i unter diesem Homomorphismus, das heißt also, zur Angabe eines *Systems von Generatoren* $(t_i)_{i \in I}$ der k-Algebra A mit einer Indexmenge I.

9. Diese Überlegungen zeigen (angesichts der elementaren Eigenschaften darstellbarer Funktoren (siehe $(\mathbf{0}, 1)$), dass die Kategorie der Funktoren

$$\boldsymbol{k\text{-}alg} \to \boldsymbol{Ens},$$

die zu Gleichungssystemen (3) gehören (anders gesagt, der Funktoren der Form V_S), *äquivalent zur dualen Kategorie der Kategorie der k-Algebren* ***k-alg*** ist, indem man jeder k-Algebra A den durch (12) definierten Funktor V_A zuweist (der auf kontravariante Art von A abhängt). Wir können daher sagen, dass das von der Immersion (6) unabhängige Studium der Funktoren V_S – das Studium, das wir als ursprüngliches Ziel der algebraischen Geometrie über k präsentierten – genau dem Studium *beliebiger k-Algebren A* entspricht. Unter dieser Korrespondenz $A \leftrightarrow \mathrm{V}_A$ entsprechen die k-Algebren A endlichen Typs den Unterfunktoren von Funktoren „Raum affinen Typs vom *endlichen Rang*", das heißt also, für die I endlich ist. Hätten wir uns vorher (fälschlicherweise) auf endliche Familien von Unbestimmten in (3) beschränkt, hätte dies bedeutet, dass wir uns ausschließlich auf das Studium von k-Algebren endlichen Typs beschränkt hätten.

Andererseits läuft das Studium der Funktoren V_S *zusammen* mit ihrer Einbettung (6) auf das Studium der k-Algebren A *zusammen* mit einem System von Generatoren $(t_i)_{i \in I}$ hinaus, oder in äquivalenter Weise, auf das Studium der *Ideale* in Polynomringen P_I. Wir sehen so insbesondere, dass für festes I die Zuordnung

$$\mathfrak{I} \mapsto \mathrm{V}_{\mathfrak{I}}$$

von Idealen in P_I auf Unterfunktoren von E^I der Form V_S *injektiv* ist: *Ein Ideal $\mathfrak{I}$ ist bekannt, wenn man den Unterfunktor $\mathrm{V}_{\mathfrak{I}}$ von E^I der Lösungen des durch $\mathfrak{I}$ definierten Gleichungssystems (3) in jeder k-Algebra k' kennt*; es ist nämlich $\mathfrak{I}$ das Ideal der Polynome F deren zugehörige Polynomfunktion $\boldsymbol{t} \mapsto F(\boldsymbol{t})$ in $\mathrm{V}_{\mathfrak{I}}(k')$ für *jede* k-Algebra *verschwindet*. Dies zeigt allgemeiner, dass wir für zwei Ideale $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}'$ in P_I die Äquivalenz

$$(\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}') \iff (\mathrm{V}_{\mathfrak{I}} \supset \mathrm{V}_{\mathfrak{I}'}) \tag{15}$$

haben.

10. Es ist notwendig den für die Frage nach den Grundlagen wichtigen Unterschied zwischen diesen auf die Behandlung *allgemeiner* k-Algebren k' bezogenen Resultaten und denen, die auftreten, wenn wir uns auf die Behandlung von k-Algebren k' beschränken, die Körper, oder allgemeiner, die *reduziert* sind (das heißt ohne nilpotentes Element $\neq 0$), zu bemerken. Sei allgemein $\boldsymbol{C}$ eine aus reduzierten Algebren bestehende Unterkategorie von ***k-alg*** (zum Beispiel die Kategorie aller reduzierten Algebren, oder all derjenigen k-Algebren, die Körper sind, oder die Kategorie mit nur einem Objekt, das eine reduzierte Algebra oder ein Körper ist); es bezeichne $\mathrm{V}_{\mathfrak{I},\boldsymbol{C}}$ die *Einschränkung* von $\mathrm{V}_{\mathfrak{I}}$ auf $\boldsymbol{C}$. Es ist offensichtlich, dass $\mathrm{V}_{\mathfrak{I},\boldsymbol{C}}$ unverändert bleibt, wenn wir das Gleichungssystem $F = 0$, wobei F die Menge $\mathfrak{I}$ durchläuft, durch das Gleichungssystem $F = 0$ ersetzen, wobei F nun die Menge der Polynome durchläuft, sodass eine entsprechende *Potenz F^n* von F existiert, die in $\mathfrak{I}$ enthalten ist. Die Menge dieser Polynome – das Urbild in P_I des Nilradikals von $\mathrm{A}_{\mathfrak{I}} = \mathrm{P}_I/\mathfrak{I}$ – ist das *Radikal* $\mathfrak{r}(\mathfrak{I})$ von $\mathfrak{I}$, und daher haben wir

$$\mathrm{V}_{\mathfrak{I},\boldsymbol{C}} = \mathrm{V}_{\mathfrak{r}(\mathfrak{I}),\boldsymbol{C}}. \tag{16}$$

Da es möglich ist, dass $\mathfrak{r}(\mathfrak{J}) \neq \mathfrak{J}$,[2] ist die Zuordnung $\mathfrak{J} \mapsto \mathrm{V}_{\mathfrak{J},\boldsymbol{C}}$ im allgemeinen nicht mehr injektiv. Falls jedoch $\mathfrak{J} = \mathfrak{r}(\mathfrak{J})$ und falls $\boldsymbol{C}$ die Quotientenkörper der k-Algebra Quotienten von P_I enthält, die Integritätsbereiche sind, dann bestimmt die Kenntnis von $\mathrm{V}_{\mathfrak{J},\boldsymbol{C}}$ vollständig $\mathfrak{J}$. In der Tat ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{r}(\mathfrak{J})$ der Schnitt über alle $\mathfrak{J}$ enthaltenden Primideale $\mathfrak{p}$ von P_I ([Bou06a, chap. II, §2, n° 6, prop. 13]); für jedes Polynom $F \in \mathrm{P}_I$, das nicht in $\mathfrak{J}$ enthalten ist, gibt es daher ein Primideal $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{J}$, sodass $F \notin \mathfrak{p}$, und ist k' der Quotientenkörper von $\mathrm{P}_I/\mathfrak{p}$, so ist die Polynomfunktion $\boldsymbol{t} \mapsto F(\boldsymbol{t})$ in k'^I nicht mehr identisch Null in $\mathrm{V}_{\mathfrak{J}}(k')$, da das Bild von F in $\mathrm{P}_I/\mathfrak{p}$ (und *erst recht* in $\mathrm{P}_I/\mathfrak{J}$) nicht Null ist. Wir können daher, mittels der vorangegangenen Hypothese an $\boldsymbol{C}$, sagen, dass *die Abbildung $\mathfrak{J} \mapsto \mathrm{V}_{\mathfrak{J},\boldsymbol{C}}$, eingeschränkt auf die Menge der Radikale, injektiv ist*. Allgemeiner zeigt die gleiche Argumentation, dass wir unter der gleichen Bedingung an $\boldsymbol{C}$ eine Äquivalenz

$$(\mathfrak{r}(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{J}')) \Longleftrightarrow (\mathrm{V}_{\mathfrak{J},\boldsymbol{C}} \supset \mathrm{V}_{\mathfrak{J}',\boldsymbol{C}}) \tag{17}$$

haben.[3]

11. *Wir können daher sagen, dass die ausschließliche Betrachtung reduzierter k-Algebren k' als Werteringe für die Koordinaten der Lösungen eines polynomialen Gleichungssystems (3) der Entwicklung einer algebraischen Geometrie entspricht, in der wir nicht zwischen einem Ideal $\mathfrak{J}$ (einer Polynomalgebra P_I) und seinem Radikal $\mathfrak{r}(\mathfrak{J})$ unterscheiden; oder, in den Begriffen des Quotientenrings $\mathrm{A}_{\mathfrak{J}} = \mathrm{P}_I/\mathfrak{J}$, wo wir nicht zwischen einer k-Algebra A und dem Quotienten nach ihrem Nilradikal unterscheiden*. Solch eine Sichtweise wäre nicht nur *a priori* künstlich, sondern es erscheint heutzutage als eine durch Erfahrung gefestigte Tatsache, dass sie unangemessen ist, eine große Zahl wichtiger Phänomene der algebraischen Geometrie auszudrücken (insbesondere die Phänomene „infinitesimaler“ Natur) und um bestimmte wesentliche Techniken zu entwickeln (wie die Technik des Abstiegs, oder die des Übergangs zwischen formaler Geometrie und algebraischer Geometrie [Gro62]). Im Verlauf unserer Abhandlung werden wir insbesondere die sehr wichtige Technik der *lokalen artinschen Ringe* auftauchen sehen, die intuitiv die „infinitesimalen Umgebungen“ von Punkten auf einer algebraischen Varietät repräsentieren.

12. In der Sichtweise der klassischen algebraischen Geometrie des 19. Jahrhunderts, wo $k = \mathbb{C}$ und wo man sich nicht zwischen den Grundkörpern „bewegt“, wird die Menge $\mathrm{V}(k) = \mathrm{V}_S(k) \subset k^I$ die durch das System (3) definierte *algebraische Varietät* genannt und das Interesse konzentriert sich auf die geometrischen Eigenschaften (Untervarietäten, Schnitte mit im selben affinen Raum k^I eingebetteten Varietäten, etc.). Wir werden sehen, dass es in der wie in (7) erläuterten konzipierten algebraischen Geometrie immer noch möglich ist, einem Funktor V_S (oder V_A (Gleichung

[2] Es genügt $P = k[X]$ und $\mathfrak{J}$ erzeugt durch X^2 zu nehmen; wir haben $\mathfrak{r}(\mathfrak{J}) = (X)$.

[3] Der berühmte „Nullstellensatz“ von Hilbert ([Bou06b, chap. V, §3, n° 3, prop. 2]) zeigt, dass die Äquivalenz (17), und damit die Injektivität von $\mathfrak{J} \mapsto \mathrm{V}_{\mathfrak{J},\boldsymbol{C}}$ auf der Menge der Radikale, ebenfalls wahr ist, falls k ein Körper ist, I endlich ist, und falls wir nur annehmen, dass $\boldsymbol{C}$ nur die *endlichen* Erweiterungen von k enthält (falls k algebraisch abgeschlossen ist, kann $\boldsymbol{C}$ daher auf k reduziert werden): In der Tat ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{J})$ nun der Schnitt der $\mathfrak{J}$ enthaltenden *maximalen* Ideale $\mathfrak{m}$ von P_I und diese sind so, dass $\mathrm{P}_I/\mathfrak{m}$ eine endliche Erweiterungen von k ist.

(12))), den wir studiert haben, ein wohldefiniertes „geometrisches“ Objekt zuzuordnen, das an die Stelle des Begriffs der „algebraischen Varietät“ tritt und diesen verallgemeinert. Da wir diesen Funktor unabhängig von seinen möglichen Einbettungen (6) studieren wollen, geht es darum, dieses Objekt (das das *Spektrum* von A genannt werden wird) *einzig und allein ausgehend von der Angabe der k-Algebra A* zu definieren. In der klassischen algebraischen Geometrie taucht der Ring A als der *Ring der Polynomfunktionen auf der Varietät* $\mathrm{V}(k)$ auf, also als Einschränkungen der Polynomfunktionen auf k^I auf diese Varietät, und die Bijektion (10) zwischen der Varietät und der Menge $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A,k)$ besteht daraus, jedem Punkt $\boldsymbol{t} \in \mathrm{V}(k)$ den Homomorphismus $f \mapsto f(\boldsymbol{t})$ zuzuordnen, der der Funktion f ihren *Wert* im Punkt $\boldsymbol{t}$ zuordnet (diese Idee ist ursprünglich von Dedekind und Weber).[4]

Die gleiche Interpretation und die Korrespondenz (10) ist natürlich auch im allgemeinen Fall möglich: Ist $f \in A_{\mathfrak{J}}$, so ist die Einschränkung der Polynomfunktion $\boldsymbol{t} \mapsto F(\boldsymbol{t})$ auf $\mathrm{V}_{\mathfrak{J}}(k')$ für jedes Polynom $F \in \mathrm{P}_I$, dessen kanonisches Bild in A gleich f ist, unabhängig von dem aus dem Urbild von f gewählten Polynom F; es ist daher eine durch f wohldefinierte Funktion $f_{k'}$ auf $\mathrm{V}_{\mathfrak{J}}(k')$ und (für festes k') ist die Abbildung

$$f \mapsto f_{k'}$$

von A in die k-Algebra $k'^{\mathrm{V}(k')}$ der Abbildungen von $\mathrm{V}(k')$ nach k' ein (im allgemeinen nicht injektiver) *Homomorphismus* von k-Algebren. Zu jedem Punkt $\boldsymbol{t} \in \mathrm{V}(k')$ gehört daher der k-Homomorphismus

$$f \mapsto f_{k'}(\boldsymbol{t}) \tag{18}$$

von A in k'. Man wird also dazu geführt, diesen Morphismus einfach mit $\boldsymbol{t}$ zu bezeichnen, $f(\boldsymbol{t})$ oder $\boldsymbol{t}(f)$ anstelle von $f_{k'}(\boldsymbol{t})$ zu schreiben, und die Elemente von $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A,k)$ die „Punkte von V_A mit Werten in k'“ (oder „mit Koordinaten in k'“) zu bezeichnen.

13. Wir haben damit sehr wohl wieder eine „geometrische“ Sprache eingeführt; allerdings haben wir es nicht mehr länger mit einem wie in der klassischen algebraischen Geometrie wohldefinierten „Objekt“ zu tun, sondern mit einer mit k' variierenden „Familie von Objekten“. Um das Spektrum von A zu erhalten, werden wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf „Punkte von V_A“ mit Werten in k-Algebren k', die *Körper* sind, beschränken; wir sagen, dass dies die „geometrischen Punkte“[5] von V_A sind und wir werden zwischen diesen (zu möglicherweise verschiedenen Körpern k' gehörenden) Punkten eine *Äquivalenzrelation* einführen. Wir sagen, dass zwei geometrische Punkte

$$\boldsymbol{t}' : A \to k', \quad \boldsymbol{t}'' : A \to k''$$

äquivalent sind, falls ein dritter geometrischer Punkt $\boldsymbol{s} : A \to K$ und (notwendig injektive) k-Algebra Homomorphismen

$$f' : k' \to K, \quad f'' : k'' \to K$$

[4]Wegen des Nullstellensatzes und des Fakts, dass $k = \mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es auch eine Bijektion zwischen $\mathrm{V}(k)$ und der *Menge* der maximalen Ideale (oder „Maximalspektrum“) von A (siehe chap. I, Appendice I).

[5]*[Anmerkung von mir: Später werden geometrische Punkte als diejenigen Punkte mit Werten in algebraisch abgeschlossenen Körpern definiert, sodass diese Bezeichnung hier nicht ganz glücklich ist.]*

existieren, sodass wir $\boldsymbol{s} = f' \circ \boldsymbol{t}' = f'' \circ \boldsymbol{t}''$ haben, mit anderen Worten, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & k' \arrow[dr, "f'"] & \\ A \arrow[ur, "\boldsymbol{t}'"] \arrow[dr, "\boldsymbol{t}''"'] & & K \\ & k'' \arrow[ur, "f''"'] & \end{tikzcd} \tag{19}$$

kommutativ ist. Wir zeigen, dass diese Relation äquivalent zur folgenden ist: $\boldsymbol{t}'^{-1}(0) = \boldsymbol{t}''^{-1}(0)$ (was auch zeigt, dass dies eine Äquivalenzrelation ist). Da f' und f'' nämlich injektiv sind, impliziert die Kommutativität des Diagramms (19) die Gleichheit der Kerne von $\boldsymbol{t}'$ und $\boldsymbol{t}''$. Umgekehrt erinnern wir uns daran, dass, da jeder Unterring eines Körpers ein Integritätsbereich ist, der Kern eines Homomorphismus $A \to k'$ ein *Primideal* von A ist. Falls die Kerne von $\boldsymbol{t}'$ und $\boldsymbol{t}''$ gleich einem gemeinsamen Primideal $\mathfrak{p}$ sind, so können k' und k'' als zwei Erweiterungen eines gemeinsamen Körpers $\kappa(\mathfrak{p})$, dem Quotientenkörper von $A/\mathfrak{p}$, betrachtet werden und wir wissen ([Bou07, chap. V, §4, n° 2, prop. 2][6]), dass ein Körper K und zwei $\kappa(\mathfrak{p})$-Monomorphismen $f' : k' \to K$, $f'' : k'' \to K$ existieren, die das Diagramm (19) kommutativ machen.

Die Äquivalenzklassen dieser Relation (die man auch als die *Orte* von A bezeichnen kann)[7] stehen daher in Bijektion mit den Primidealen von A; in der Tat erhalten wir so *sämtliche* der Primideale, denn ist $\mathfrak{p}$ ein solches Ideal und ist $\kappa(\mathfrak{p})$ der Quotientenkörper des Integritätsbereichs $A/\mathfrak{p}$, so entspricht das Ideal $\mathfrak{p}$ der Äquivalenzklasse des geometrischen Punkts $A \to A/\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p})$, wobei die beiden Pfeile die kanonischen Homomorphismen sind.

Wir haben so eine kanonische Bijektion zwischen der Menge der „Orte" der k-Algebra A und der Menge der Primideale von A erhalten. Es ist daher die Menge $\mathrm{Spec}(A)$ der Primideale von A, die wir als *zugrunde liegende Menge* des „geometrischen Objekts", das das Spektrum von A sein soll, nehmen. In dem klassischen Fall, wo $k = \mathbb{C}$ und wo A eine $\mathbb{C}$-Algebra endlichen Typs ist, *enthält* diese Menge die zu A gehörige „algebraische Varietät", also die Menge der geometrischen Punkte von V_A mit Werten in k.

14. Die Menge $\mathrm{Spec}(A)$ ist auf natürliche Weise mit einer *Topologie* ausgestattet, die verbunden ist mit der Verallgemeinerung des Begriffs der „Untervarietät" einer algebraischen Varietät. Klassisch ist eine Untervarietät einer durch ein Gleichungssystem (3) definierten algebraischen Varietät durch ein Gleichungssystem definiert, das das System (3) *enthält*; anders gesagt, falls wir den Ring A als Ring der „Polynomfunktionen" auf der Varietät betrachten, so ist eine Untervarietät als die Menge definiert, wo

[6] *[Anmerkung von mir: Diese Referenz scheint nicht zu stimmen. Eigentlich müsste es [Bou07, chap. V, §2, n° 4, cor.] über die Existenz einer Kompositums-Erweiterung sein.]*

[7] Der gut informierte Leser wird in dieser Sprache eine Umformulierung der „allgemeinen" oder „generischen" Punkte der algebraischen Varietäten, wie sie beispielsweise bei Zariski oder A. Weil auftreten, erkennen.

einige dieser Funktionen *verschwinden*. Im allgemeinen Fall führt uns das dazu, eine Teilmenge S einer k-Algebra A zu betrachten und, für jede k-Algebra k', die Menge (Teilmenge von $\mathrm{V}_A(k')$), wo all die Funktionen $f_{k'}$, die nach n° 12 den Elementen $f \in S$ entsprechen, verschwinden. Falls wir uns wie in n° 13 auf geometrische Punkte mit Werten in einem *Körper* beschränken, führt uns das dazu, die Menge $\mathrm{V}(S)$ der „Orte“ derjenigen Punkte zu betrachten, wo die $f_{k'}$ für $f \in S$ verschwinden. Es folgt aus n° 13, dass diese Menge bijektiv der *Menge der S enthaltenden Primideale von A* entspricht; man sagt auch, dass diese Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$ die „durch S definierte algebraische Menge“ ist. Wir merken an, dass sich diese nicht ändert, wenn wir S durch das Radikal des von S erzeugten Ideals ersetzen; und da dieses Radikal genau der Schnitt aller S enthaltenden Primideale von A ist, sehen wir, dass wir so eine Bijektion zwischen den Radikalen von A und der Menge der Teilmengen $\mathrm{V}(S)$ von $\mathrm{Spec}(A)$ erhalten. Wir zeigen ([Bou06a, chap. II, §4]), dass diese Menge von Teilmengen die Menge der *abgeschlossenen* Teilmengen einer Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$ ist, der sogenannten *Spektraltopologie* oder *Zariski-Topologie*. Darüber hinaus (loc. cit.) ist der durch Ausstatten von $\mathrm{Spec}(A)$ mit dieser Topologie erhaltende Raum X quasikompakt und erfüllt das Kolmogoroff-Axiom, jedoch besitzt er im Allgemeinen nicht-abgeschlossene Punkte (und ist somit erst recht kein separierter Raum); für jedes Element $f \in A$ ist die Menge $\mathrm{D}(f) = X - \mathrm{V}(f)$ offen in X und die $\mathrm{D}(f)$ (für $f \in A$) bilden eine *Basis* der Spektraltopologie.

15. Falls wir wollen, dass das Objekt „Spektrum von A“, das wir jedem Ring A zuordnen möchten, umgekehrt erlaubt, den Ring A zu rekonstruieren, so genügt es nicht, für dieses Objekt den topologischen Raum $\mathrm{Spec}(A)$ zu nehmen, den wir soeben definierten: zum Beispiel erhalten wir für *jeden* der *Körper K* einen auf einen einzigen Punkt reduzierten Raum. Im letzteren Fall ist es klar, das die Betrachtung dieses Raums dem Studium der Körper K nichts neues hinzufügt.

Es ist vergeblich zu hoffen, das Spektrum ausschließlich in topologischen Begriffen beschreiben zu können; der topologische Raum $X = \mathrm{Spec}(A)$ muss mit einer Struktur versehen werden, wo die Algebra A mit eingeschlossen ist. Das Modell, von dem wir uns hier leiten lassen, wird durch die *holomorphen Varietäten* (für die die algebraischen Varietäten ohne Singularitäten im klassischen Fall ($k = \mathbb{C}$) spezielle Beispiele liefern) geliefert; nach der von H. Cartan eingeführten Auffassung, weil es ja auf einer solchen Varietät möglich ist, für jede offene Teilmenge $U \subset X$ die *in U holomorphen* (komplexen) Funktionen zu definieren, definieren wir durch zuordnen der Menge $\mathscr{O}(U)$ dieser Funktionen zu jeder offenen Teilmenge U auf offensichtliche Weise eine *Prägarbe von Ringen* auf X und in der Tat ist diese Prägarbe eine *Garbe $\mathscr{O}_X$*; anders gesagt, die holomorphe Varietät tritt als topologischer Raum versehen mit einer Garbe von Ringen auf, oder, wie wir auch sagen, als *geringter Raum*. In seiner fundamentalen Arbeit [Ser55] hat J. P. Serre im Wesentlichen gezeigt, wie man diese Definition in die algebraische Geometrie übertragen kann. Beschränken wir uns zuerst auf den klassischen Fall ($k = \mathbb{C}$) und nehmen an, dass die „algebraische Varietät“ zu einem Ring A von „Polynomfunktionen“ gehört, der ein Integritätsbereich ist (der Fall, in dem man sagt, dass die Varietät „irreduzibel“ ist, und auf den man sich in der klassischen Geometrie häufig beschränkt). Der Quotientenkörper K von A wird dann auch der „Körper der rationalen Funktionen“ auf X genannt; ein Element g/f von

K, Quotient zweier Polynomfunktionen (mit $f \neq 0$), ist eine in den Punkten $x \in X$, wo $f(x) \neq 0$, *definierte* Funktion, kann aber im allgemeinen nicht mittels Stetigkeit in Punkte fortgesetzt werden, wo $f(x) = 0$ („Pole“ oder „Punkte der Unbestimmtheit“). Seit Riemann spielen diese Funktionen für eine algebraische Varietät traditionell die Rolle der „meromorphen Funktionen“ auf einer analytischen Varietät. Wir sind also dazu geleitet, die Prägarbe $U \mapsto \mathscr{O}(U)$ auf X zu betrachten, wobei $\mathscr{O}(U)$ für jedes offene $U \subset X$ der Ring der auf U definierten rationalen Funktionen ist.

Nun könnten wir eine analoge Definition geben, falls A ein *beliebiger* Integritätsbereich ist, X der topologische Raum $\operatorname{Spec}(A)$ ist, und wo wir einerseits die Offenen $U \subset X$ auf diejenigen der *Basis* $\mathrm{D}(f)$ (für $f \neq 0$) beschränken, und wo wir für $\mathscr{O}(U)$ den Ring A_f der Elemente von K von der Form g/f^n (n eine ganze Zahl ≥ 0, $g \in A$) nehmen. In der Tat ist es aber unnötig auch nur *irgendeine* Annahme an den Ring A zu stellen, und es ist möglich den Ring A_f für *jedes* $f \in A$ (Nullteiler oder nicht) zu definieren ([Bou06a, chap. II, §5, n° 1]); wir zeigen dann, dass die Abbildung $\mathrm{D}(f) \mapsto A_f$ eine *Garbe* von k-Algebren auf X definiert, mit $\widetilde{A}$ oder $\mathscr{O}_X$ bezeichnet, und dass das zu A gehörige Objekt „Spektrum von A“ schließlich der *geringte Raum* $(X, \mathscr{O}_X)$ ist. Die detaillierten Ausführungen werden in Kap. I, §1 gegeben; wir werden unter anderem sehen, dass die Halme der Ringgarbe $\mathscr{O}_X$ die *lokalen* Ringe $A_{\mathfrak{p}}$, die Lokalisierungen von A in den Primidealen von A, sind, sodass $(X, \mathscr{O}_X)$ ein *lokal k-geringter* Raum ist; der Ring A *ergibt* sich dann (bis auf Isomorphie) aus seinem Spektrum durch die Relation $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \simeq A$.

Wir werden in Kap. I, §1 auch sehen wie zu jedem Homomorphismus von k-Algebren

$$\varphi : A \to A' \tag{20}$$

auf funktorielle Weise ein Morphismus von lokal k-geringten Räumen

$$\operatorname{Spec}(\varphi) : X' = \operatorname{Spec}(A') \to X = \operatorname{Spec}(A) \tag{21}$$

assoziiert ist, sodass sich der zugehörige Homomorphismus von k-Algebren

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(X', \mathscr{O}_{X'})$$

mit dem gegebenen Homomorphismus (20) identifiziert (in Anbetracht der kanonischen Isomorphismen $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\sim} A$, $\Gamma(X', \mathscr{O}_{X'}) \xrightarrow{\sim} A'$). Das impliziert insbesondere, dass die Abbildung

$$\varphi \mapsto \operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Hom}_{k\text{-alg}}(A, A') \to \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Spec}(A'), \operatorname{Spec}(A)) \tag{22}$$

injektiv ist (wobei die zweite Komponente die Menge der Morphismen lokal k-geringter Räume ist (**0**, 4.1.12)). In der Tat werden wir auch beweisen, dass diese Abbildung *bijektiv* ist (**I**, 1.6.3); in anderen Begriffen, *der kontravariante Funktor $A \mapsto$ $\operatorname{Spec}(A)$ von der Kategorie der k-Algebren in die Kategorie der lokal k-geringten Räume ist voll treu.* Dies ermöglicht somit (in Anbetracht der üblichen „Umkehrung der Pfeile“ beim Übergang von einer Kategorie zu ihrer entgegengesetzten) in der Praxis die Kategorie der k-Algebren mit einer vollen Unterkategorie der Kategorie lokal k-geringter Räume zu identifizieren, nämlich mit der aus denjenigen Räumen gebildeten, die isomorph zu einem $\mathrm{Spec}(A)$ für eine entsprechende k-Algebra A sind; diese lokal k-geringten Räume werden „affine Schemata über k“ genannt. Das ursprüngliche Problem der algebraischen Geometrie über k, das wir als das Studium der k-Algebren identifiziert haben, ist somit auch äquivalent zum Studium der algebraisch-topologischen Objekte, die die affinen Schemata über k sind. Was den in (12) definierten Funktor V_A anbelangt, er drückt sich in Anbetracht der Bijektivität von (22) in den Begriffen von $\mathrm{Spec}(A)$ einfach durch

$$\mathrm{V}_A(k') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k'), \mathrm{Spec}(A)) \tag{23}$$

aus, wobei die zweite Komponente die gleiche Bedeutung hat wie in (22).

16. Es mag auf den ersten Blick scheinen, dass die vorhergehende Kategorienäquivalenz nur dazu führen kann, das Studium eines Objekts mit einer ziemlichen einfachen Definition, wie eine k-Algebra, durch dasjenige des viel komplizierteren Objekts, was ihr Spektrum ist, zu ersetzen. In der Tat, sogar im Studium der *lokalen* Algebren, gibt ihnen die Übersetzung von Eigenschaften in Begriffe der Theorie der affinen Schemata eine „geometrische“ Gestalt, die sie oft weniger abstrakt und auf eine Art der „Intuition“ leichter zugänglich macht, die den Umgang erleichtern (siehe Kap. IV), obwohl endgültige Beweise immer auf rein algebraische Eigenschaften zurückzubringen sind. Der entscheidende durch die geometrische Sprache, die auf der Einführung des Spektrums eines Rings beruht, herbeigeführte Vorteil kommt jedoch daher, dass diese Sprache es ohne Aufwand ermöglicht, den Rahmen der kommutativen Algebra zu *verlassen*, was entscheidend ist, falls wir die moderne algebraische Geometrie auf dem Modell der klassischen Theorie aufbauen wollen. Man hat nämlich seit den Anfängen des 19. Jahrhunderts erkannt, dass das Studium polynomialer Gleichungssysteme vom Typ (3) (das ist, was man die *affine* algebraische Geometrie nennen kann) lauter einfache und verblüffende Aussagen ergibt, falls man das in einen größeren Rahmen, denen der *projektiven* algebraischen Geometrie, stellt.[8] Wir wissen, klassisch, dass der projektive Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ durch „Verklebung“ $n+1$ affiner Räume erhalten wird, nämlich durch die Hyperebenen $x_j = 1$ im Raum $\mathbb{C}^{n+1}$ $(1 \leq j \leq n+1)$ und zwei Punkte werden identifiziert, falls die diese verbindende Gerade im Raum $\mathbb{C}^{n+1}$ durch den Ursprung verläuft. Nun tritt dieser Prozess des „Verklebens“ in anderen Bereichen der Mathematik in viel allgemeineren Situationen auf, da wir so jetzt die verschiedenen Begriffe der „Varietät“ definieren: topologisch, differenzierbar, analytisch, etc. In all diesen Bereichen ist der entscheidende Punkt des „Verklebens“ das Verkleben der *Topologien*, diejenigen zusätzlichen Strukturen leiten sich davon ohne Mühe ab; es ist wahrscheinlich H. Cartan, der als erster den Grund für diesen Umstand durch die Beobachtung sah, dass die verschiedenen Strukturen, die wir erwähnt haben, alle als Struktur eines *geringten Raums* definiert werden können, und dass die Operation des „Verklebens“ sich somit in jedem Fall auf die allgemeine Operation des *Verklebens von Garben* reduziert.

Nun, da wir einmal die kommutative Algebra auf das Studium bestimmter geringter Räume reduziert haben, genügt es nun diese allgemeine Operation *mutatis*

[8]Es ist wahrscheinlich kein Zufall, dass es die gleichen Menschen, Monge und Poncelet, sind, die zugleich am Ursprung dieser Erweiterung und des Übergangs vom Körper der reellen Zahlen zu dem Körper der komplexen Zahlen sind.

mutandis anzuwenden, um schließlich bei dem fundamentalen Begriff der modernen algebraischen Geometrie, denen des *Schemas* über k, anzugelangen: dies wird einfach ein *lokal k-geringter* Raum X sein, der eine Überdeckung (X_α) aus Offenen besitzt, die (für die induzierte Struktur eines geringten Raums) *affine* Schemata über k sind.

Ein solches Objekt definiert wieder einen Funktor

$$k' \mapsto X(k') : \textbf{\textit{k-alg}} \to \textbf{\textit{Ens}} \tag{24}$$

mittels der ((23) verallgemeinernden) Formel

$$X(k') = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k'), X) \tag{25}$$

(„Punkte von X mit Werten in k'“). Man kann übrigens zeigen (**I**, 2.3.6), dass die Kenntnis des Funktors (24) das Schema X bis auf Isomorphie zurück gibt, und genauer, dass der durch die Formel (25) definierte Funktor $X \mapsto X(.)$ von der Kategorie der Schemata über k in die Kategorie der Funktoren ***k-alg*** $\to$ ***Ens*** *voll-treu* ist; mit anderen Worten, er erlaubt es, die Kategorie der Schemata mit der vollen Unterkategorie der Kategorie der Funktoren

$$\textbf{\textit{k-alg}} \to \textbf{\textit{Ens}}$$

zu identifizieren.[9]

17. Es bleibt darauf hinzuweisen, dass der „Basisring“ k in all dem was vorangeht nur eine beiläufige Rolle gespielt hat. Der geringte Raum $\mathrm{Spec}(A)$ hängt nämlich für eine gegebene k-Algebra nur von der *Ringstruktur* von A ab, und die Angabe des eine k-Algebren-Struktur definierenden Homomorphismus $k \to A$ ist einfach äquivalent zur Angabe einer k-Algebren-Struktur auf der Ringgarbe $\mathscr{O}_X$, oder auch (von dem was wir in n° 15 gesehen haben, indem $k = \mathbb{Z}$ gesetzt wird) zur Angabe eines Morphismus lokal geringter Räume

$$\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k).$$

Es liegt daher im Interesse, zunächst den Begriff eines Schemas im „absoluten“ Sinn zu definieren (d.h. ein Schema über $\mathbb{Z}$), und dann ein „Schema über k“ (oder k-Schema) als ein Schema X zu definieren, dessen Ringgarbe $\mathscr{O}_X$ mit einer k-Algebren-Struktur versehen ist, d.h. definiert durch die Angabe eines Ringhomomorphismus $k \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, oder auch (und das vorzugsweise) durch die Angabe eines Morphismus lokal geringter Räume

$$X \to \mathrm{Spec}(k).$$

Diese letzte Sichtweise hat den erheblichen Vorteil, dass sie geeignet ist, den Ring k (oder besser das affine Schema k) durch ein *beliebiges Schema Y* zu ersetzen

[9]In diesem Sinne können wir erwägen, dass die Einführung der Strukturen lokal geringter Räume eine vorwiegend künstliche Technik ist, um auf eine besonders bequeme und intuitive Art einen Prozess des Verklebens „affiner“ Funktoren umzuformulieren. Für weitere Details über die Beziehung zwischen geringten Räumen und Funktoren ***k-alg*** $\to$ ***Ens***, siehe [DG70, chap I, §1], das ebenfalls eine vom technischen Standpunkt aus exzellente Darstellung der Definition der Schemata enthält.

und somit zum Begriff des *Schemas X über einem Schema Y* (oder *Y-Schema*) (siehe **I**, 2.6.1) zu führen, das in unserer Abhandlung auf sehr detaillierte Art studiert werden wird, und das, intuitiv, ganz ähnlich dem Begriff eines *gefaserten Raums* ist (oder allgemeiner, eines topologischen Raums X über einem topologischen Raum Y, das heißt, versehen mit einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$), der häufig von der Topologen verwendet wird.

Der Gegenstand der algebraischen Geometrie, in dem Sinne, wie wir ihn in dieser Abhandlung verstehen, ist also das Studium der Schemata, *lokal geringter Räume eines bestimmten Typs; oder, auf äquivalente Art, das Studium der Funktoren (24), die sie hervorbringen.*

Literatur

[Bou06a] Nicolas Bourbaki. *Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4*. Éléments de mathématique. Réimpression inchangée de l'édition originale de 1985. Springer, 2006.

[Bou06b] Nicolas Bourbaki. *Algèbre commutative. Chapitres 5 à 7*. Éléments de mathématique. Réimpression inchangée de l'édition originale de 1975. Springer, 2006.

[Bou07] Nicolas Bourbaki. *Algèbre. Chapitres 4 à 7*. Éléments de mathématique. Réimpression inchangée de l'édition originale de 1981. Springer, 2007.

[DG70] Michel Demazure und Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Avec un appendice ıt Corps de classes local par Michiel Hazewinkel. Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970, S. xxvi+700.

[GD71] Alexander Grothendieck und Jean A. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique. I.* Bd. 166. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1971.

[Gro60] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique: I. Le langage des schémas*. In: *Institut des Hautes Études Scientifique. Publications Mathématiques.* 4 (1960), S. 5–228. URL: http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?id=PMIHES_1960__4_.

[Gro62] Alexander Grothendieck. *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.]* Paris: Secrétariat mathématique, 1962.

[Käh58] Erich Kähler. *Geometria arithmetica*. In: *Annali di Matematica Pura ed Applicata (4)* 45 (1958), S. 1–368.

[Ser55] Jean-Pierre Serre. *Faisceaux algébriques cohérents*. In: *Annals of Mathematics. Second Series* 61 (1955), S. 197–278.