

# Fachpraktikum “Kombinatorische Algorithmen”

---

Prof. Dr. Ulrich Thiel

TU Kaiserslautern

<https://ulthiel.com/math>

Feb 10, 2021



 TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
KAISERSLAUTERN

 195  
SYMBOLIC TOOLS

## Was ich mache

Darstellungstheorie, algebraische Geometrie, Computeralgebra.

## Netter Umstand

Oft werden Fragestellungen durch endliche kombinatorische Strukturen beschrieben. Diese kann man im Computer studieren!

## Deshalb

Aufbauend auf Julia/OSCAR habe ich ein kleines Projekt namens JuLie für Darstellungstheorie (insbesondere Lie-Theorie) begonnen:

`https://ulthiel.github.io/JuLie.jl/dev/`

## Fachpraktikum

Mitarbeit an diesem Projekt! Anschließend Abschlussarbeit möglich.  
(Im SS2021 gibt es Proseminar Symmetrie: Einstieg in die Lie-Theorie)

## Wikipedia

“Combinatorics is an area of mathematics primarily concerned with counting, both as a means and an end in obtaining results, and certain properties of finite structures.”

## Beispiel

Eine Partition einer ganzen Zahl  $n \geq 0$  ist eine Sequenz  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  positiver ganzer Zahlen  $\lambda_i$  mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$ .

Z.B.  $n = 4$ :  $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ .

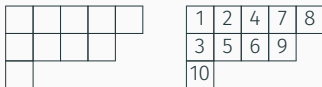
Frage: Wie viele Partitionen von  $n$  gibt es? Wie zählt man sie auf?

## Wen interessiert's?

Z.B. werden irreduzible Darstellungen der symmetrischen Gruppe  $S_n$  durch Partitionen von  $n$  parametrisiert!

## Beispiel

Das **Young-Diagramm** einer Partition  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  ist ein Diagramm aus leeren Box, mit  $\lambda_i$  Boxen in Zeile  $i$ . Z.B. für  $10 = 5 + 4 + 1$ :



Ein **Young-Tableaux** ist eine Füllung der Boxen mit Zahlen  $1, \dots, n$ .

Ein Young tableaux heißt **standard** falls die Einträge in jeder Zeile und jeder Spalte strikt aufsteigend sind.

Frage: Wie viele standard Tableaux gibt es zu einer Partition  $\lambda$ ? Wie zählt man sie auf?

## Wen interessiert's?

Z.B. ist die Dimension der zu  $\lambda$  gehörigen irreduziblen Darstellung von  $S_n$  ist gleich dieser Anzahl!

```
julia> using Julie
```

```
julia> partitions(4)
```

```
5-element Array{Partition{Int64},1}:
```

```
[4]
```

```
[3, 1]
```

```
[2, 2]
```

```
[2, 1, 1]
```

```
[1, 1, 1, 1]
```

```
julia> standard_tableaux([3,2])
```

```
5-element Array{Tableau,1}:
```

```
[[1, 2, 3], [4, 5]]
```

```
[[1, 2, 4], [3, 5]]
```

```
[[1, 2, 5], [3, 4]]
```

```
[[1, 3, 4], [2, 5]]
```

```
[[1, 3, 5], [2, 4]]
```

```
julia> kostka_polynomial([4,2,1],[3,2,1,1])
```

```
t^3 + 2*t^2 + t
```

## Wozu das Ganze?

1. Spaß
2. Ich habe da (irgendwann) was mit vor...
3. Julia geht ab:

Function	JuLie	Sage	GAP	Magma
catalan( $2^{20}$ )	0.02 <sup>[1]</sup>	22.1 <sup>[2]</sup>	—	1.72 <sup>[3]</sup>
compositions(26)	4.98 <sup>[4]</sup>	154 <sup>[5]</sup>	49.7 <sup>[6]</sup>	—
partitions(90)	5.45 <sup>[7]</sup>	185 <sup>[8]</sup>	52.0 <sup>[9]</sup>	33.0 <sup>[10]</sup>
semistandard_tableaux([5,3,2])	0.88 <sup>[11]</sup>	30.8 <sup>[12]</sup>	—	—

**Interessenten sind immer willkommen!**