

Übungen zu Algebraische Strukturen — Blatt 1

Prof. Dr. U. Thiel

Abgabetermin: **Fr. 01.05.2020, 10:00 Uhr**

L. Ruhstorfer

SS 20

Aufgabe 1:

Ist $(G, *)$ in den folgenden Fällen eine Gruppe? (Man gebe einen Beweis der Gruppenaxiome oder ein Gegenbeispiel für ein verletztes Axiom an.)

(a) $G = \mathbb{Q}_{>0}$ mit der Verknüpfung $a * b = \frac{a \cdot b}{2}$;

(b) $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 + b_2, a_2 + b_1)$.

(Auf der rechten Seite der Gleichungen bezeichnen „+“, „ \cdot “ und der Bruchstrich hierbei die gewöhnliche Addition, Multiplikation bzw. Division reeller Zahlen.)

Aufgabe 2:

Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ wird $G = \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung

$$a * b = x \cdot a + x \cdot b + y$$

eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3 (Zusatzaufgabe):

Zeigen Sie, dass jede Gruppe G mit weniger als 5 Elementen abelsch ist.

Hinweis: Zusatzaufgaben können freiwillig bearbeitet werden und fließen auch nicht in die Wertung ein.