

Übungen zu Algebraische Strukturen — Blatt 10

Prof. Dr. U. Thiel
Abgabetermin: **Fr. 03.07.2020, 10:00 Uhr**

L. Ruhstorfer
SS 20

Aufgabe 28:

Seien $R \leq S$ Ringe und $x \in S$.

- (a) Die Auswerteabbildung

$$\varphi: R[t] \longrightarrow S: f = \sum_{k=0}^n a_k t^k \longmapsto f(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

ist ein Ringhomomorphismus.

- (b) Jedes Element des Ringes $\mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1 \rangle$ lässt sich in der Form $a := \overline{a_0 + a_1 t}$ mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ schreiben.
- (c) Die Abbildung $\rho: \mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, $\overline{f} \mapsto f(i)$ ist ein Ringisomorphismus.

Aufgabe 29:

Ist I ein Ideal in einem Ring R , so heißt

$$\sqrt{I} := \{a \in R \mid a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \subset R$$

das Radikal von I .

- (a) Zeigen Sie, dass \sqrt{I} ein Ideal von R ist.
- (b) Man zeige: Ist $a \in \sqrt{\langle 0 \rangle}$, so gilt $1 + a \in R^*$.
- (c) Berechnen Sie $\sqrt{\langle 180 \rangle}$ in \mathbb{Z} .

Aufgabe 30 (Zusatzaufgabe):

In einem Ring R heißt ein Element $e \in R$ idempotent, wenn $e^2 = e$. Zeigen Sie:

- (a) Ist $R = S \times T$ ein nicht-triviales Produkt von zwei Ringen (d.h. S und T sind beide nicht der Nullring), so besitzt R ein idempotentes Element $e \notin \{0, 1\}$.
- (b) Besitzt umgekehrt R ein idempotentes Element $e \notin \{0, 1\}$, so ist $R \cong R/e \times R/(1 - e)$ isomorph zu einem nicht-trivialen Produkt von zwei Ringen.
- (c) Ist \mathbb{Z}_8 bzw. \mathbb{Z}_{12} isomorph zu einem nicht-trivialen Produkt von zwei Ringen?

Bitte beachten Sie auch die Informationen zur Vorlesungs-
umfrage auf der zweiten Seite.

Vorlesungsumfrage algebraische Strukturen: Um an der Vorlesungsumfrage für unsere Vorlesung teilzunehmen verwenden Sie bitte folgenden Link:

<https://befragung.uni-kl.de/evasys/online.php?p=MJ844>

mit der **Losung: MJ844**.

Sie können direkt an der Umfrage teilnehmen, indem Sie folgenden QR-Code benutzen.



Die Deadline für die Umfrage ist der **3. Juli**. Die Zuordnung der Übungsleiter(innen) ist in der Umfrage wie folgt:

1. Kathrin Kaiser
2. Marcel Wittmann
3. Vera Grafe