

## Übungen zu Algebraische Strukturen — Blatt 10

Prof. Dr. U. Thiel  
Abgabetermin: **Fr. 03.07.2020, 10:00 Uhr**

L. Ruhstorfer  
SS 20

---

### Aufgabe 28:

Seien  $R \leq S$  Ringe und  $x \in S$ .

- (a) Die Auswerteabbildung

$$\varphi: R[t] \longrightarrow S: f = \sum_{k=0}^n a_k t^k \longmapsto f(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

ist ein Ringhomomorphismus.

- (b) Jedes Element des Ringes  $\mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1 \rangle$  lässt sich in der Form  $a := \overline{a_0 + a_1 t}$  mit  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  schreiben.
- (c) Die Abbildung  $\rho: \mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\overline{f} \mapsto f(i)$  ist ein Ringisomorphismus.

### Aufgabe 29:

Ist  $I$  ein Ideal in einem Ring  $R$ , so heißt

$$\sqrt{I} := \{a \in R \mid a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \subset R$$

das Radikal von  $I$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\sqrt{I}$  ein Ideal von  $R$  ist.
- (b) Man zeige: Ist  $a \in \sqrt{\langle 0 \rangle}$ , so gilt  $1 + a \in R^*$ .
- (c) Berechnen Sie  $\sqrt{\langle 180 \rangle}$  in  $\mathbb{Z}$ .

### Aufgabe 30 (Zusatzaufgabe):

In einem Ring  $R$  heißt ein Element  $e \in R$  idempotent, wenn  $e^2 = e$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $R = S \times T$  ein nicht-triviales Produkt von zwei Ringen (d.h.  $S$  und  $T$  sind beide nicht der Nullring), so besitzt  $R$  ein idempotentes Element  $e \notin \{0, 1\}$ .
- (b) Besitzt umgekehrt  $R$  ein idempotentes Element  $e \notin \{0, 1\}$ , so ist  $R \cong R/e \times R/(1 - e)$  isomorph zu einem nicht-trivialen Produkt von zwei Ringen.
- (c) Ist  $\mathbb{Z}_8$  bzw.  $\mathbb{Z}_{12}$  isomorph zu einem nicht-trivialen Produkt von zwei Ringen?

Bitte beachten Sie auch die Informationen zur Vorlesungs-  
umfrage auf der zweiten Seite.

**Vorlesungsumfrage algebraische Strukturen:** Um an der Vorlesungsumfrage für unsere Vorlesung teilzunehmen verwenden Sie bitte folgenden Link:

<https://befragung.uni-kl.de/evasys/online.php?p=MJ844>

mit der **Losung: MJ844**.

Sie können direkt an der Umfrage teilnehmen, indem Sie folgenden QR-Code benutzen.



Die Deadline für die Umfrage ist der **3. Juli**. Die Zuordnung der Übungsleiter(innen) ist in der Umfrage wie folgt:

1. Kathrin Kaiser
2. Marcel Wittmann
3. Vera Grafe