Übungen zu Algebraische Strukturen — Blatt 12

Prof. Dr. U. Thiel — L. Ruhstorfer
Abgabetermin: **Mo. 13.07.2020, 10:00 Uhr** — SS 20

Bitte beachten Sie, dass die Abgabe dieses Übungsblattes freiwillig bis zum Montag, den 13.07 erfolgen kann. Die in Aufgabe 34 und 35 erreichte Punktzahl wird Ihnen als Bonus zur Zulassung für die Klausur angerechnet. Die Inhalte des Übungsblatts sind wichtig und prüfungsrelevant. Aus diesem Grunde wird empfohlen das Übungsblatt zu bearbeiten.

Aufgabe 34:
Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i] = \{x + yi : x, y \in \mathbb{Z}\}$ mit der Funktion $\delta(z) := |z|^2$ ein euklidischer Ring (und damit ein Hauptidealring) ist.

Aufgabe 35:
Es seien $f = t^5 + \overline{2}t^3 - t$ und $g = \overline{2}t^3 + t^2 + \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_5[t]$.

(a) Berechnen Sie alle größten gemeinsamen Teiler von f und g und stellen Sie einen von ihnen in der Form $df + eg$ mit $d, e \in \mathbb{Z}_5[t]$ dar.

(b) Liegt das Polynom $t^3 + t^2 + \overline{1}$ im Ideal $\langle f, g\rangle$?

(c) Ist $\overline{t^{1000}}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}_5[t]/\langle f, g\rangle$?

Aufgabe 36 (Zusatzaufgabe):
Es sei $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ eine Folge von Idealen in einem Ring R, von denen jedes im nächsten enthalten ist (man spricht in diesem Fall auch von einer aufsteigenden Kette von Idealen).

(a) Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ aller dieser Ideale wieder ein Ideal in R ist.

(b) Ist R ein Hauptidealring, so zeige man, dass die Kette von Idealen ab einem gewissen Glied konstant ist, d.h. dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $I_n = I_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$.

(c) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und eine aufsteigende Idealkette in R an, die nicht ab einem gewissen Glied konstant ist.