Übungen zu Algebraische Strukturen — Blatt 4

Prof. Dr. U. Thiel L. Ruhstorfer
Abgabetermin: **Fr. 22.05.2020, 10:00 Uhr** SS 20

Aufgabe 10:
Überprüfen Sie, welche der folgenden Teilmengen U Untergruppen der gegebenen Gruppe G sind.

(a) $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $U = \{(a, b) \in G \mid b = 2^a\}$

(b) $G = S_4$, $U = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma^2 = \mathrm{id}\}$

(c) $G = S(\mathbb{R})$, $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv mit $f(x) = x$ für alle $x < 0\}$.

(d) G eine beliebige Gruppe, $U = \{a \in G \mid ab = ba$ für alle $b \in G\}$

Aufgabe 11:
Seien U und V Untergruppen einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass $U \cup V$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 12 (Zusatzaufgabe):
Es sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine nicht-leere Teilmenge. Man beweise die folgenden vereinfachten Untergruppenkriterien:

(a) U ist eine Untergruppe von G genau dann, wenn $ab^{-1} \in U$ für alle $a, b \in U$ gilt.

(b) Hat U nur endlich viele Elemente, so ist U genau dann eine Untergruppe von G, wenn $ab \in U$ für alle $a, b \in U$ gilt.