Übungen zu Algebraische Strukturen — Blatt 6

Prof. Dr. U. Thiel — L. Ruhstorfer

Abgabetermin: **Fr. 05.06.2020, 10:00 Uhr** — SS 20

Aufgabe 16:
Es seien G und H zwei Gruppen und $a, b \in G$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\operatorname{ord}(a^{-1}) = \operatorname{ord}(a)$ und $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(ba)$.

(b) Ist $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) < \infty$, so ist $\operatorname{ord}(f(a))$ ein Teiler von $\operatorname{ord}(a)$.

(c) Ist die Gruppe D_6 aus Aufgabe 14 isomorph zur alternierenden Gruppe A_4?

Aufgabe 17:
Es seien U und V zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe G. Zeigen Sie:

(a) Durch $(u, v) \sim (u_0, v_0) :\Leftrightarrow uv = u_0v_0$ wird eine Äquivalenzrelation auf $U \times V$ definiert.

(b) Die Äquivalenzklasse von $(u, v) \in U \times V$ ist $\overline{(u, v)} = \{(ua, a^{-1}v) : a \in U \cap V\}$ und besitzt genau $|U \cap V|$ Elemente.

(c) Es gilt die Produktformel für Untergruppen

$$|UV| = \frac{|U| \cdot |V|}{|U \cap V|},$$

wobei $UV = \{uv : u \in U, v \in V\}$.

Aufgabe 18 (Zusatzaufgabe):
Es seien $\sigma, \tau \in S_4$ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = 3$ und $\operatorname{ord}(\tau) = 2$. Welche Ordnung kann dann die von diesen beiden Elementen erzeugte Untergruppe $\langle \sigma, \tau \rangle$ haben? Man gebe für jede solche mögliche Ordnung ein Beispiel an.