

Übungen zu Algebraische Strukturen — Blatt 7

Prof. Dr. U. Thiel

Abgabetermin: **Fr. 12.06.2020, 10:00 Uhr**

L. Ruhstorfer

SS 20

Aufgabe 19:

Welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq G$ sind Normalteiler?

- (a) $G = \mathbb{Z}$, $U = \{1, -1\}$;
- (b) $G = S_n$, $U = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = 1\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$;
- (c) $U = f^{-1}(N)$ für einen Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow H$ und $N \triangleleft H$;
- (d) $G = S_4$, $U = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$.

Aufgabe 20:

Es sei U eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G .

- (a) Gibt es keine weitere Untergruppe von G , die genauso viele Elemente wie U hat, so ist U ein Normalteiler von G .
- (b) Ist $2|U| = |G|$, so ist U ein Normalteiler von G .

Hinweis zu Teil (a): Untersuchen Sie zu einem gegebenen $a \in G$ die Teilmenge aUa^{-1} von G .

Aufgabe 21 (Zusatzaufgabe):

Sei G eine Gruppe sowie U_1 und U_2 Untergruppen von G .

- (a) Zeigen Sie, dass

$$U_1U_2 := \{u_1u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $U_1U_2 = U_2U_1$ gilt.

- (b) Folgern Sie, dass U_1U_2 immer eine Untergruppe ist, wenn U_1 oder U_2 ein Normalteiler von G ist.