

## Übungen zu Algebraische Strukturen — Blatt 8

Prof. Dr. U. Thiel

Abgabetermin: **Fr. 19.06.2020, 10:00 Uhr**

L. Ruhstorfer

SS 20

---

### Aufgabe 22:

Es sei  $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

- (a) Für welche  $a, b \in \mathbb{R}$  ist  $f : G \rightarrow G, \bar{x} \mapsto \overline{ax + b}$  eine wohldefinierte Abbildung?
- (b) Zeigen Sie, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  die von  $\frac{1}{n}$  erzeugte Untergruppe von  $G$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_n$  ist.

### Aufgabe 23:

Es sei  $N$  ein Normalteiler einer Gruppe  $G$ . Man zeige:

- (a) Für jede Untergruppe  $U$  von  $G$  mit  $N \subseteq U$  ist  $U/N$  eine Untergruppe von  $G/N$ .
- (b) Die Abbildung

$$\{U : U \text{ ist Untergruppe von } G \text{ mit } N \subseteq U\} \rightarrow \{V : V \text{ ist Untergruppe von } G/N\}, U \mapsto U/N$$

ist bijektiv.

- (c) Bestimmen Sie mithilfe von Teil (b) alle Untergruppen von  $\mathbb{Z}_n$  für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

### Aufgabe 24 (Zusatzaufgabe):

Es seien  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und  $U$  eine Untergruppe einer endlichen Gruppe  $G$  mit  $n = \frac{|G|}{|U|}$ . Man zeige für alle  $a \in G$ :

- (a) Ist  $U$  ein Normalteiler von  $G$ , so gilt  $a^n \in U$ .
- (b) Im Allgemeinen liegt zwar mindestens eines der Elemente  $a, a^2, \dots, a^n$  in  $U$ , aber nicht notwendigerweise  $a^n$ .