

Übungen zu Algebraische Strukturen — Blatt 9

Prof. Dr. U. Thiel
Abgabetermin: **Fr. 26.06.2020, 10:00 Uhr**

L. Ruhstorfer
SS 20

Aufgabe 25:

Es sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a^2 \in \mathbb{Z}$. Wir definieren

$$\mathbb{Z}[a] := \{m + n a : m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[a]$ ein Ring ist.
- (b) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$.

Hinweis zu Teil (b): Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{Z}[a]$ betrachte man das Betragsquadrat $|z|^2$. Aus den Grundlagen der Mathematik dürfen Sie verwenden, dass $|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 26:

- (a) Zeigen Sie, dass in jedem endlichen Ring $R \neq \{0\}$ jedes Element entweder ein Nullteiler oder eine Einheit ist.
- (b) Bestimmen Sie alle Einheiten und Nullteiler in $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.
- (c) Ist $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$ eine zyklische Gruppe?

Aufgabe 27 (Zusatzaufgabe):

- (a) Bestimme alle Ringhomomorphismen von \mathbb{Z}_{12} nach \mathbb{Z}_8 und von \mathbb{Z}_{12} nach \mathbb{Z}_6 .
- (b) Zeigen Sie, dass keine der Ringe \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} isomorph sind.