Übungen zu Elementare Zahlentheorie — Blatt 1

Prof. Dr. Ulrich Thiel, TU Kaiserslautern Sommersemester 2021
Abgabetermin: Montag, 03.05.2021, 10:00 Uhr Dr. Tommy Hofmann

---

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(i) Ist $p \neq 3$ eine positive Primzahl und $p+2$ prim, so gilt $p \equiv 5 \bmod 6$.[1]

(ii) Außer $(3,5,7)$ gibt es keine weiteren Primzahldrillinge[2].

Aufgabe 2. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$. Zeigen Sie:

(i) Fast alle natürlichen Zahlen n sind von der Form $ax + by$ mit $x, y \in \mathbb{N}_0$, d.h., es gibt eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass alle natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, von der Form $n = ax + by$ mit $x, y \in \mathbb{N}_0$ sind.

(ii) Für $a, b > 1$ ist $n = ab - a - b$ die größte natürliche Zahl für die

$$ax + by = n$$

keine Lösung mit $x, y \in \mathbb{N}_0$ hat.

Aufgabe 3. Lösen Sie die folgenden beiden linearen diophantischen Gleichungen

$$5x + 7y = 13, \tag{1}$$

$$6x + 15y = 7. \tag{2}$$

(Das sind zwei einzelne Gleichungen und kein System von Gleichungen.)

Aufgabe 4. Sei

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

die n-te Fermatzahl. Zeigen Sie:

(i) $F_n - 2 = F_0 F_1 \cdots F_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Die Fermatzahlen F_n sind paarweise relativ prim.

Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

---

[1] Erinnerung: Sind $a, b, n \in \mathbb{Z}$, so schreiben wir $a \equiv b \bmod n$ genau dann wenn $n \mid (a - b)$.

[2] Für $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ heißt das Tripel $(a, a+2, a+4)$ ein *Primzahldrilling*, falls a, $a+2$ und $a+4$ Primzahlen sind.