

## Übungen zu Elementare Zahlentheorie — Blatt 6

Prof. Dr. Ulrich Thiel, TU Kaiserslautern  
Abgabetermin: Montag, 12.07.2021, 10:00 Uhr

Sommersemester 2021  
Dr. Tommy Hofmann

---

Mit Primzahl ist im Folgenden stets eine positive Primzahl gemeint.

**Aufgabe 1.** Es sei  $p > 3$  prim. Zeigen Sie:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} 1, & p \equiv \pm 1 \pmod{12}, \\ -1, & p \equiv \pm 5 \pmod{12}. \end{cases}$$

**Aufgabe 2.** Es sei  $m \in \mathbb{Z}$  quadratfrei mit  $m \equiv 1 \pmod{4}$ . Zeigen Sie:

$$A(m) = \left\{ \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{2} \right\}.$$

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, dass die Gleichung  $x^2 - 5y^2 = -1$  unendlich viele Lösungen  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  besitzt.

**Aufgabe 4.** Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i) Ist  $n \in B(-7)$ , so gilt  $2n \in B(-7)$ .
- (ii) Ist  $n \in B(7)$ , so gilt  $2n \in B(7)$ .