Prof. Dr. Ulrich Thiel
Laura Voggesberger, M. Sc.

Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 0

Präsenzaufgaben ohne Abgabe

Etwas Aussagenlogik.

Hinweis: Wir werden keine formale Logik behandeln, daher werden die folgenden Begriffe nicht präzise mathematisch definiert, sondern wir bedienen uns dem „Allgemeinverständnis".

Aussagen sind sprachliche Gebilde, die Sachverhalte beschreiben und denen man einen Wahrheitswert (wahr oder falsch) zuordnen kann.

Logische Formeln sind Aussagen, die man durch **logische Operationen** und durch **logische Verknüpfungen** von gegebenen Aussagen erhält. Die **Negation** $\neg A$ („nicht A") einer Aussage A ist wahr wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist. Für Aussagen A und B ist die **Konjunktion** $A \wedge B$ (A und B) wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, und falsch sonst. Die **Disjunktion** $A \vee B$ (A oder B) ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist, und falsch sonst. Die **Implikation** einer Aussage B durch eine Aussage A, geschrieben $A \Rightarrow B$, ist wahr, wenn A und B wahr sind, oder wenn A falsch ist, unabhängig vom Wert von B. Ist A wahr und B falsch, so ist auch die Implikation falsch.

Den Wahrheitsgehalt von logischen Formeln kann man durch **Wahrheitstafeln** untersuchen: für alle möglichen Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen in der Formel wird das Ergebnis der Formel ermittelt.
Beispiele von **Wahrheitstafeln**:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Konjunktion

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikation

Zwei Aussagen A und B heißen **äquivalent**, $A \Leftrightarrow B$, wenn A genau dann wahr ist, wenn B wahr ist. Eine Aussage, die immer wahr ist wird auch **Tautologie** genannt.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für Aussagen A, B, C die folgende Aussagen Tautologien sind:

(a) Für $\wedge$:

1. Idempotenz $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$,
2. Kommutativität $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

(b) Für $\vee$:

1. Idempotenz $(A \vee A) \Leftrightarrow A$,

2. Kommutativität $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

(c) Distributivgesetze für $\wedge$ und $\vee$:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

(d) Für das Komplement:
$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
$A \vee \neg A$

(e) Für die Implikation:
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Aufgabe 2. Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \forall x \geq -1$$

Aufgabe 3 (Widerspruchsbeweis)**.**

(a) Seien A und B zwei Aussagen. Zeigen Sie: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$.

(b) Verwenden Sie die Tautologie aus (a), um zu zeigen, dass für $0 < a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
Dazu führen Sie bitte die Negation dieser Aussage zum Widerspruch.