

Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 1

Abgabetermin: 06.05.2022, 10:00 Uhr, Briefkästen Gebäude 48 Erdgeschoss oder als eine PDF mit dem Button in OLAT hochladen

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien A , B und C Aussagen. Entscheiden Sie mithilfe von Wahrheitstabellen, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

- (a) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (B \wedge C)$
- (b) $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow A \wedge (B \vee C)$
- (c) $((A \Rightarrow \neg B) \vee C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (\neg A \vee C))$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

- (a) f ist injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : f(M) \rightarrow M$ gibt mit $g \circ f = \text{id}_M$.
- (b) f ist surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : N \rightarrow M$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_N$.
- (c) f ist bijektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : N \rightarrow M$ gibt mit $g \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ g = \text{id}_N$. Weiter ist dann $g = f^{-1}$ die Umkehrabbildung.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Bitte begründen Sie.

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x + 1,$
- (b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1,$
- (c) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x,$
- (d) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto 2x.$

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte). Schreiben Sie ein Programm, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Summe $\sum_{k=1}^n k^2$ rekursiv berechnet. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der geschlossenen Formel $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ aus Aufgabe 2 für einige Werte von n .