TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Ulrich Thiel
Laura Voggesberger, M. Sc.

Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 10

Abgabetermin: 08.07.2022, 10:00 Uhr, Briefkästen Gebäude 48 Erdgeschoss oder als eine PDF mit dem Button im OLAT hochladen. Die Programmieraufgaben dürfen als extra Datei (zum Beispiel txt) hochgeladen werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte). (a) Berechnen Sie jeweils eine Basis des Kerns von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 8 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 5} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/5)^{3\times 3}.$$

(b) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge für die linearen Gleichungssysteme

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $K^{3\times 3}$ der Vektorraum aller 3×3 Matrizen über einem Körper K. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : K^{3\times 3} \to K, \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \mapsto a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$$

ein K-Vektorraumhomomorphismus ist. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ der endliche Körper mit p Elementen.

(a) Zeigen Sie: Jeder d-dimensionale $\mathbb{F}_p$-Vektorraum V hat genau p^d Elemente.

(b) Sei $V = (\mathbb{F}_2)^3$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Elemente des Untervektorraums $<v_1, v_2> \subset V$ und alle Vektoren $v_3 \in V$, sodass v_1, v_2, v_3 eine Basis von V bilden.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum für einen Körper K und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

(a) $0 \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$.

(b) $(-1) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$.

(c) U ist mit der von V induzierten Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum.

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, und seien $U, V \subseteq K^n$ Untervektorräume gegeben durch Basen $u_1, \ldots, u_s$ von U und $v_1, \ldots, v_t$ von V.

(a) Zeigen Sie, dass $U \cap V \subset K^n$ ein Untervektorraum ist.

(b) Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung einer Basis von $U \cap V$.

(c) Implementieren Sie den Algorithmus in einer Programmiersprache Ihrer Wahl und wenden Sie Ihr Programm auf die Untervektorräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{Q}^4$ an.