TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Ulrich Thiel
Laura Voggesberger, M. Sc.

Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 12

Abgabetermin: 22.07.2022, 10:00 Uhr, Briefkästen Gebäude 48 Erdgeschoss oder als eine PDF mit dem Button im OLAT hochladen. Die Programmieraufgaben dürfen als extra Datei (zum Beispiel txt) hochgeladen werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie den Homomorphiesatz (Satz 5.12.2 im Skript) nochmals ausführlich, das heißt zeigen Sie, dass für einen Vektorraumhomomorphismus zwischen zwei K-Vektorräumen $F : V \to W$ gilt

$$V/_{\mathrm{Ker}(F)} \simeq \mathrm{Bild}(F).$$

Verweisen Sie nicht auf den Beweis von Satz 3.3.10 in Ihrem Beweis.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $F : (\mathbb{Z}/3)^2 \to (\mathbb{Z}/3)^4$ ein Vektorraumhomomorphismus mit $F(x) = A \cdot x$ wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/3)^{4\times 2}.$$

Bestimmen Sie je eine Basis des Kernes und des Bildes von F. Überprüfen Sie damit, dass die Dimensionsformel aus Satz 5.11.3 in diesem Fall erfüllt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & b & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ für } a, b \in \mathbb{R}$$

gegeben. Bestimmen Sie

(a) $\det(A)$

(b) $\det(A^3)$

(c) $\det(B)$ und

(d) $\det(A \cdot B)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie welche Teilmengen von

$$\{x^3 + x, x^2, x^3, x^2 + 1, x, 1\}$$

Basen von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ bilden.
Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 4 von Blatt 9 ohne Beweis verwenden.

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte)**.** Schreiben Sie ein Computerprogramm in der Programmiersprache Ihrer Wahl um die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu bestimmen.
Hinweis: Sie können dabei vorgehen wie in Algorithmus 5.6 und Ihre Lösung von der Zusatzaufgabe von Blatt 9 verwenden.