

Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 2

Abgabetermin: 13.05.2022, 10:00 Uhr, Briefkästen Gebäude 48 Erdgeschoss oder als eine PDF mit dem Button in OLAT hochladen

Aufgabe 1 (4 Punkte). (a) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann heißt a kongruent zu b modulo m , geschrieben

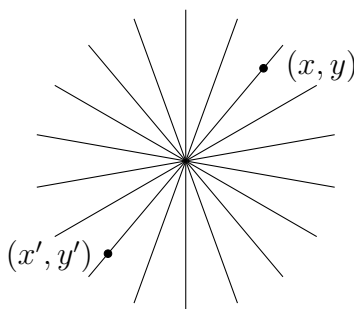
$$a \equiv b \pmod{m},$$

wenn $m|(a - b)$ (vergleiche auch Definition 2.1.6). Zeigen Sie, dass \equiv eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Schreiben Sie eine Funktion, die $a \equiv b \pmod{m}$ entscheidet.

(c) Zeigen Sie, dass $\frac{56\,249\,121\,391}{123\,259} \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die Menge der Punkte der reellen Ebene ohne den Nullpunkt. Auf M definiere $(x, y) \sim (x', y')$ genau dann, wenn es eine Gerade durch $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gibt, auf der sowohl der Punkt (x, y) als auch der Punkt (x', y') liegen.



(a) Zeigen Sie, dass durch \sim eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

(b) Finden Sie eine geometrische Darstellung der Menge der Äquivalenzklassen M/\sim indem Sie in jeder Äquivalenzklasse einen geeigneten Repräsentanten wählen.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie per Hand den ggT(a, b) und geben Sie jeweils $u, v \in \mathbb{Z}$ an mit $\text{ggT}(a, b) = ua + vb$ für

(a) $a = 22\,224$ und $b = 11\,111$,

(b) $a = 1\,434$ und $b = 725$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Es ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, wie auch in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\{n! + k \mid k \in \mathbb{N} \text{ mit } 2 \leq k \leq n\}$ enthält keine Primzahl.

(b) Die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid n < k \leq n! + 1\}$ enthält mindestens eine Primzahl.

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte). Implementieren Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl den erweiterten Euklidischen Algorithmus. Testen Sie Beispiele und drucken Sie diese mit aus.