

## Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 2

Abgabetermin: 13.05.2022, 10:00 Uhr, Briefkästen Gebäude 48 Erdgeschoss oder als eine PDF mit dem Button in OLAT hochladen

**Aufgabe 1** (4 Punkte). (a) Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Dann heißt  $a$  kongruent zu  $b$  modulo  $m$ , geschrieben

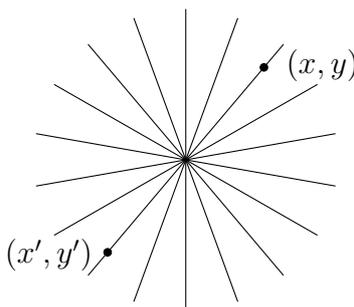
$$a \equiv b \pmod{m},$$

wenn  $m|(a - b)$  (vergleiche auch Definition 2.1.6). Zeigen Sie, dass  $\equiv$  eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Schreiben Sie eine Funktion, die  $a \equiv b \pmod{m}$  entscheidet.

(c) Zeigen Sie, dass  $\frac{56\,249\,121\,391}{123\,259} \in \mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 2** (4 Punkte). Sei  $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  die Menge der Punkte der reellen Ebene ohne den Nullpunkt. Auf  $M$  definiere  $(x, y) \sim (x', y')$  genau dann, wenn es eine Gerade durch  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  gibt, auf der sowohl der Punkt  $(x, y)$  als auch der Punkt  $(x', y')$  liegen.



(a) Zeigen Sie, dass durch  $\sim$  eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

(b) Finden Sie eine geometrische Darstellung der Menge der Äquivalenzklassen  $M/\sim$  indem Sie in jeder Äquivalenzklasse einen geeigneten Repräsentanten wählen.

**Aufgabe 3** (4 Punkte). Berechnen Sie per Hand den ggT( $a, b$ ) und geben Sie jeweils  $u, v \in \mathbb{Z}$  an mit  $\text{ggT}(a, b) = ua + vb$  für

(a)  $a = 22\,224$  und  $b = 11\,111$ ,

(b)  $a = 1\,434$  und  $b = 725$ .

**Aufgabe 4** (4 Punkte). Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Es ist  $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ , wie auch in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie:

(a) Die Menge  $\{n! + k \mid k \in \mathbb{N} \text{ mit } 2 \leq k \leq n\}$  enthält keine Primzahl.

(b) Die Menge  $\{k \in \mathbb{N} \mid n < k \leq n! + 1\}$  enthält mindestens eine Primzahl.

**Zusatzaufgabe 5** (4 Punkte). Implementieren Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl den erweiterten Euklidischen Algorithmus. Testen Sie Beispiele und drucken Sie diese mit aus.