TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Ulrich Thiel
Laura Voggesberger, M. Sc.

Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 4

Abgabetermin: 27.05.2022, 10:00 Uhr, Briefkästen Gebäude 48 Erdgeschoss oder als eine PDF mit dem Button im OLAT hochladen. Die Programmieraufgaben dürfen als extra Datei (zum Beispiel txt) hochgeladen werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien G_1 und G_2 Gruppen mit neutralen Elementen $e_1 \in G_1$ und $e_2 \in G_2$. Sei weiterhin $\varphi : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) $\varphi(e_1) = e_2$ und $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ für alle $a \in G_1$.

(b) $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq G_1$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq G_2$ sind Untergruppen.

(c) Ist φ ein Isomorphismus, dann ist auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ ein Gruppenisomorphismus.
Hinweis: Es ist zu zeigen, dass $\varphi^{-1}(a \circ b) = \varphi^{-1}(a) \circ \varphi^{-1}(b)$ gilt für alle $a, b \in G_2$. Schreiben Sie dazu $a = \varphi(a')$ und $b = \varphi(b')$ für gewisse $a', b' \in G_1$ (warum geht das?).

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $\sigma, \tau \in S_7$ wie folgt definiert:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie σ, τ, $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ sowohl als Produkt disjunkter Zykel als auch als Produkt von Transpositionen. Bestimmen Sie jeweils Ordnung und sign.
Hinweis: Sie dürfen dazu Bemerkung 3.2.36 und Bemerkung 3.2.38 aus dem Skript verwenden.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \geq 1$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt

$$\mathbb{Z}/_{a \cdot b} \cong \mathbb{Z}/_{a} \times \mathbb{Z}/_{b}.$$

Hinweis: Definieren Sie $\varphi : \mathbb{Z}/_{a \cdot b} \to \mathbb{Z}/_{a} \times \mathbb{Z}/_{b}, x \bmod a \cdot b \mapsto (x \bmod a, x \bmod b)$ und zeigen Sie, dass φ ein Gruppenisomorphismus ist. Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass φ wohldefiniert ist!

(b) Bestimmen Sie das Urbild von $(2+6\mathbb{Z}, -7+35\mathbb{Z})$ unter dem Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/_{210} \cong \mathbb{Z}/_{6} \times \mathbb{Z}/_{35}.$$

(c) Entscheiden Sie (mit Bergründung) ob die Gruppen $\mathbb{Z}/_{2} \times \mathbb{Z}/_{3}$ und $\mathbb{Z}/_{2} \times \mathbb{Z}/_{2}$ zyklisch sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\mapsto aba^{-1} \end{aligned}$$

definiert eine Operation von G auf G von links, die Konjugation.

(b) Die Bahn von $b \in G$,

$$b^G := \{aba^{-1} \mid a \in G\},$$

heißt Konjugationsklasse von b. Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen der S_3 ohne die Hilfe eines Computerprogrammes.

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $G = S_6$. Verwenden Sie das Compuerprogramm GAP (`https://www.gap-system.org/Releases/index.html`) und bestimmen Sie

(a) die Gruppenordnung von G.

(b) eine Menge von Erzeuger von G.

(c) die Konjugationsklassen von G.

(d) alle Elemente einer Konjugationsklasse aus (c) Ihrer Wahl.

Hinweis: Verwenden Sie die GAP-Befehle `SymmetricGroup`, `Order`, `ConjugacyClasses`, `ConjugacyClass` *und* `Elements`.