TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

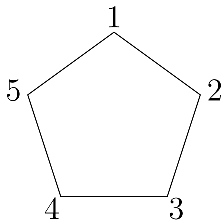
Prof. Dr. Ulrich Thiel
Laura Voggesberger, M. Sc.

# Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 5

Abgabetermin: 03.06.2022, 10:00 Uhr, Briefkästen Gebäude 48 Erdgeschoss oder als eine PDF mit dem Button im OLAT hochladen. Die Programmieraufgaben dürfen als extra Datei (zum Beispiel txt) hochgeladen werden.

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Sei $G$ die Symmetriegruppe des regelmäßigen 5-Ecks:




Bestimmen Sie:

(a) die Gruppenordnung von $G$ mit Hilfe der Bahnformel,

(b) alle Elemente von $G$ als Permutationen der Ecken,

(c) alle Untergruppen von $G$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Sei $G = S_4$ die symmetrische Gruppe auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Zeigen Sie, dass dann $S_4$ auf $M$ operiert, indem Sie die Bedingungen von Definition 3.2.20 aus dem Skript überprüfen. Hierbei ist die Operation wie in Beispiel 3.2.23 definiert: es ist $\sigma.j := \sigma(j)$ für $\sigma \in S_4$ und $j \in M$.

(b) Bestimmen Sie alle Bahnen der Operation aus (a). Warum kann kein Element $m \in M$ in zwei verschiedenen Bahnen liegen?

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die symmetrische Gruppe $S_n$.

(a) Sei $\sigma = (k_1, k_2, \ldots, k_r) \in S_n$ ein $r$-Zykel. Das heißt $\sigma(k_i) = k_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, $\sigma(k_r) = k_1)$ und $\sigma(m) = m$ für alle $m \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_r\}$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{ord}(\sigma) = r$ gilt.

(b) Sei nun $\tau = \sigma_{m_1} \circ \cdots \circ \sigma_{m_l} \in S_n$ ein Produkt von paarweisen disjunkten Zykeln $\sigma_{m_i}$ ist, wobei $\sigma_{m_i}$ die Länge $m_i$ hat. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}(\tau) = \mathrm{kgV}(m_1, \ldots, m_l)$ gilt.
*Hinweis: Aus der (a) ist bekannt, dass* $\mathrm{ord}(\sigma_{m_i}) = m_i$ *gilt. Zeigen Sie, dass* $\sigma_{m_i} \circ \sigma_{m_j} = \sigma_{m_j} \circ \sigma_{m_i}$ *gilt für alle* $i, j \in \{1, \ldots, l\}$*. Zeigen Sie schließlich, dass für* $k := \mathrm{kgV}(m_1, \ldots, m_l)$ *gilt:* $\tau^k = id$ *und* $\tau^{k'} \neq id$ *für alle* $0 < k' < k$*.*

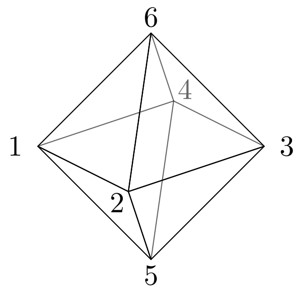
**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Sei $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und sei $M := 2^N$ (Potenzmenge in fünf Zahlen).
Betrachten Sie die Operation $S_5 \times M \to M$ definiert durch $(\sigma, M) \mapsto \{\sigma(m) \mid m \in M\}$.

(a) Bestimmen Sie ein vollständiges Repräsentantensystem $R$ der Bahnen der Operation.

(b) Bestimmen und begründen Sie für alle $r \in R$ die Mächtigkeit $|\mathrm{Stab}(r)|$.

(c) Stellen Sie die Bahngleichung mit den einzelnen Summanden $\frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(r)|}$ dar.

**Zusatzaufgabe 5** (4 Punkte)**.** Sei $G = \mathrm{Sym}(O)$ die Symmetriegruppe des Oktaeders $O$. Durch Nummerieren der Ecken können wir $G$ als Untergruppe der $S_6$ auffassen.




(a) Bestimmen Sie die Gruppenordnung von $G$ mit Hilfe der Bahnformel.

(b) Finden Sie Erzeuger von $G$ und beweisen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.

(c) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von $G$ mit Hilfe von GAP.

*Hinweis: Verwenden Sie die GAP-Befehle* `Group`, `Order` *und* `ConjugacyClasses` *wie in der Zusatzaufgabe auf dem vorherigen Blatt.*