

## Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 6

Abgabetermin: 10.06.2022, 10:00 Uhr, Briefkästen Gebäude 48 Erdgeschoss oder als eine PDF mit dem Button im OLAT hochladen. Die Programmieraufgaben dürfen als extra Datei (zum Beispiel txt) hochgeladen werden.

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Zeigen Sie: Ist  $H \subset G$  eine Untergruppe mit Index  $[G : H] = 2$ , dann ist  $H$  ein Normalteiler von  $G$ .

*Hinweis: Zeigen Sie, dass  $G$  die disjunkte Vereinigung von  $H$  und  $gH$  (geschrieben  $G = H \dot{\cup} gH$ ) ist, wobei  $g \in G \setminus H$ , und anschließend dass  $gH = Hg$  gilt.*

**Aufgabe 2** (4 Punkte). Sei  $\varphi : G \rightarrow F$  ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

- (a) Ist  $M \subset F$  ein Normalteiler, dann ist  $\varphi^{-1}(M) \subset G$  ein Normalteiler.
- (b) Ist  $\varphi$  surjektiv und  $N \subset G$  ein Normalteiler, dann ist  $\varphi(N) \subset F$  ein Normalteiler.

*Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass sowohl  $\varphi^{-1}(M)$  als auch  $\varphi(N)$  Untergruppen sind! Sie dürfen die Ergebnisse von Aufgabe 1, Blatt 4 verwenden.*

**Aufgabe 3** (4 Punkte). Stellen Sie die Verknüpfungstabellen der Multiplikation und Addition des Rings  $\mathbb{Z}/10$  mit  $a + b := a + b$  und  $a \cdot b := a \cdot b$  auf.

Welche Elemente von  $\mathbb{Z}/10$  haben ein multiplikativ Inverses? Überprüfen Sie, ob diese Elemente bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

**Aufgabe 4** (4 Punkte). Welche der folgenden Mengen sind mit den entsprechenden Verknüpfungen Ringe oder sogar Körper? Bitte begründen Sie.

- (a)  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} =: \mathbb{Q}[i] \subset \mathbb{C}$ .
- (b)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
- (c)  $\mathbb{C}[x]$ .
- (d)  $\mathbb{Z}/91$ .
- (e)  $\mathbb{Z}/569$ .

Bei c) darf vorausgesetzt werden, dass  $R[x]$  ein Ring ist, falls  $R$  ein Ring ist.

**Zusatzaufgabe 5** (4 Punkte). Lässt sich bei dem bekannten Schiebepuzzle folgende Konfiguration

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

in die Ausgangsstellung

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

überführen?

*Hinweis: Zeigen Sie, dass  $S_{16}$  auf dem Schiebepiel operiert. Überlegen Sie sich welche Operationen einen erlaubten Spielzug darstellen. Wenn die obige Konfiguration aus der unteren durch erlaubte Züge erreicht werden kann, handelt es sich dann um eine gerade oder ungerade Anzahl der Züge? Vergleichen Sie das mit der Operation, die die Ausgangskonfiguration direkt in die obige Konfiguration überführt.*