TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Ulrich Thiel
Laura Voggesberger, M. Sc.

Mathematik für Informatik: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2022 - Übungsblatt 9

Abgabetermin: 01.07.2022, 10:00 Uhr, Briefkästen Gebäude 48 Erdgeschoss oder als eine PDF mit dem Button im OLAT hochladen. Die Programmieraufgaben dürfen als extra Datei (zum Beispiel txt) hochgeladen werden.

Der Fachbereich Informatik führt jedes Semester eine Vorlesungsumfrage durch. Sie können auch für diese Veranstaltung eine Umfrage ausfüllen, Sie kommen über den QR-Code zur Anmeldung für die Umfragen. Sie finden die Umfragen unter `https://vlu.cs.uni-kl.de/teilnahme/`, oder Sie scannen den QR-Code rechts ab.
Wir würden uns sehr über eine rege Teilnahme freuen!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $V \subset \mathbb{Z}/3$ für folgendes Gleichungssystem und eine Basis von V:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & \bar{2}x_2 & + & \bar{2}x_3 & + & x_4 & + & \bar{2}x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & + & \bar{2}x_3 & + & \bar{2}x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \bar{2}x_3 & + & \bar{2}x_4 & + & \bar{2}x_5 & = & 0 \\ \bar{2}x_1 & + & \bar{2}x_2 & + & x_3 & + & \bar{2}x_4 & + & \bar{2}x_5 & = & 0 \end{array}$$

(b) Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{Q}$ eine Basis des Lösungsraums $V_t \subset \mathbb{Q}^3$ des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & (t-1)\cdot x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & (t-2)\cdot x_2 & + & (t^2-t+4)\cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $d \geq 2$ und $\mathbb{R}[x]_{\leq d} = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq d\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq d$. Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen Untervektorräume von $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ sind:

(a) $U_1 = \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid f(0) = 0\}$,

(b) $U_2 = \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid (f \circ f')(0) = 0\}$,

(c) $U_3 = \{f^2 \mid f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}\}$ (hier ist $f^2(x) := f(x)\cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$),

(d) $U_4 = \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid f'(0) + f''(0) = 0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bilden die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \; v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$? Beweisen Sie Ihre Behauptung. Falls die Vektoren keine Basis bilden, wählen Sie eine maximale Anzahl an linear unabhängigen Vektoren aus der Menge aus und ergänzen Sie diese zu einer Basis.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Für jedes $b \in \mathbb{R}$ bilden die $d+1$ Polynome

$$1, (x-b), (x-b)^2, \ldots, (x-b)^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}$$

eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$.

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei

$$\begin{aligned} l_1 &= a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ &\vdots \\ l_r &= a_{r,1}x_1 + \ldots + a_{r,n}x_n = 0 \end{aligned}$$

mit $a_{i,j} \in \mathbb{Q}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem. Schreiben Sie jeweils eine Funktion, die

(a) das System in Zeilenstufenform bringt.

(b) das System in reduzierte Zeilenstufenform bringt.